MATRIKS

A. Pengertian Matriks

$$\begin{vmatrix} 34 & 8 \\ 34 & 6 \\ 51 & 12 \\ 51 & 13 \end{vmatrix}$$

- Perhatikan susunan kumpulan bilangan di atas. Susunan kumpulan bilangan di atas berbentuk persegi panjang dan dinyatakan dalam baris dan kolom. Susunan suatu kumpulan bilangan dalam bentuk persegi panjang yang diatur menurut baris dan kolom dengan menggunakan kurung biasa/ siku ini disebut *matriks.*

- *Matriks* adalah susunan bilangan-bilangan dalam baris dan kolom yang berbentuk persegi panjang.
- *Baris sebuah matriks* adalah susunan bilangan-bilangan yang mendatar dalam matriks.
- *Kolom sebuah matriks* adalah susunan bilangan-bilangan yang tegak dalam matriks.

- matriks berordo *i x j* dengan *i* dan *j* bilangan asli dapat ditulis sebagai berikut. Secara umum, matriks berordo *i x j* dengan *i* dan *j* bilangan asli dapat ditulis sebagai berikut.

$$A_{ixj} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} \end{vmatrix}$$

Jenis-jenis Matriks

1. *Matriks baris* adalah matriks yang terdiri dari satu baris.

Misalnya: *P* [-5 2], *Q* [10 9 8]

2. *Matriks kolom* adalah matriks yang terdiri dari satu kolom.

Misalnya: $R = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} \quad S = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

3. *Matriks persegi* adalah matriks yang banyak baris sama dengan banyak kolom.

Misalnya: $T = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$ $W = \begin{bmatrix} -8 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 4 & -4 & 0 \end{bmatrix}$

4. *Matriks nol* adalah matriks yang semua elemennya nol.

Misalnya:

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5. *Matriks identitas* adalah matriks yang elemen-elemen diagonal utamanya sama dengan 1, sedangkan elemen-elemen lainnya sama dengan 0.

Misalnya:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6. *Matriks Skalar* adalah matriks yang elemen-elemen diagonal utamanya sama, sedangkan elemen di luar elemen diagonalnya bernilai nol.

Misalnya:

$$K = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad L = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

7. *Matriks diagonal* adalah matriks persegi yang elemen di luar diagonal utamanya bernilai nol.

Misalnya:

$$D = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

8. *Matriks segitiga atas* adalah matriks persegi yang elemen-elemen di bawah diagonal utamanya bernilai nol.

Misalnya:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \qquad T = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 7 & 12 \\ 0 & 3 & 2 & 15 \\ 0 & 0 & 4 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 14 \end{bmatrix}$$

9. *Matriks segitiga bawah* adalah matriks persegi yang elemen-elemen di atas diagonal utamanya bernilai nol.

Misalnya:

$$X = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad Y = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

*10***.** *Transpos matriks A* atau *(At)* adalah sebuah matriks yang disusun dengan cara menuliskan baris ke-*i* matriks *A* menjadi kolom ke-*i* dan sebaliknya, menuliskan kolom ke-*j* matriks *A* menjadi baris ke-*j*.

Misalnya: ,

$$W = \begin{bmatrix} -8 & 3 & 0 \\ 7 & 0 & 4 \\ 4 & -4 & 0 \end{bmatrix} \qquad W^t = \begin{bmatrix} -8 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$W^t = \begin{bmatrix} -8 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Sifat-sifat matriks

1. $(A \times B)^t = A^t \times B^t$
2. $(A^t)^t = A$
3. $(cA)^t = cA^t$, c adalah konstanta
4. $(AB)^t = B^tA^t$

B. Operasi Hitung pada Matriks

B. 1. Penjumlahan dan Pengurangan Matriks

Misalnya :

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+4 \\ 5+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix}$$

B. 2. Perkalian Bilangan Real dengan Matriks

Penjumlahan matriks *A* berordo *i* x *j* secara berulang sebanyak *n* kali.

$$A_{ixj} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} \end{vmatrix}$$

$$A + A + \ldots + A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & \ldots & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & \ldots & a_{2j} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & \ldots & a_{ij} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & \ldots & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & \ldots & a_{2j} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & \ldots & a_{ij} \end{bmatrix} + \ldots + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & \ldots & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & \ldots & a_{2j} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & \ldots & a_{ij} \end{bmatrix}$$

$$nA = \begin{bmatrix} a_{11} + a_{11} + \ldots + a_{11} & a_{12} + a_{12} + \ldots + a_{12} & \ldots & \ldots & a_{1j} + a_{1j} + \ldots + a_{1j} \\ a_{21} + a_{21} + \ldots + a_{21} & a_{22} + a_{22} + \ldots + a_{22} & \ldots & \ldots & a_{2j} + a_{2j} + \ldots + a_{2j} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} + a_{i1} + \ldots + a_{i1} & a_{i2} + a_{i2} + \ldots + a_{i2} & \ldots & \ldots & a_{ij} + a_{ij} + \ldots + a_{ij} \end{bmatrix}$$

$$nA_{ixj} = \begin{vmatrix} na_{11} & na_{12} & \ldots & na_{1j} \\ na_{21} & na_{22} & \ldots & na_{2j} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ na_{i1} & na_{i2} & \ldots & na_{ij} \end{vmatrix}$$

Dari uraian ini, kita dapat menarik kesimpulan sebagai berikut.

Jika A sebuah matriks dan k bilangan real maka hasil kali kA adalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan masing-masing elemen matriks A dengan k.

B. 3. Perkalian Dua Matriks

$$A_{mxp} x B_{pxn} = C_{mxn}$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$

$$AxB = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{bmatrix}$$

Jika setiap matriks berikut dapat dioperasikan di mana *a* adalah konstanta, maka berlaku sifat-sifat berikut.

$$P + Q = Q + P$$

$$(P + Q) + R = P + (Q + R)$$

$$P(Q + R) = PQ + PR$$

$$P(Q - R) = PQ - PR$$

$$(P - Q)R = PR - QR$$

$$a(P + Q) = aP + aQ$$

$$(a + b)P = aP + bP$$

$$(a - b)P = aP - bP$$

$$ab(P) = a(bP)$$

$$a(PQ) = (aP)Q = P(aQ)$$

$$(PQ)R = P(QR)$$

C. Determinan dan Invers Matriks

- **C. 1. Determinan**

Suatu matriks persegi selalu dapat dikaitkan dengan suatu bilangan yang disebut *determinan.* Determinan dari matriks persegi *A* dinotasikan dengan $|A|$

Untuk matriks *A* berordo 2 X 2, determinan matriks *A* didefinisikan sebagai berikut.

- Jika $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, maka determinan matriks A adalah $|A| = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$

- untuk matriks *B* berordo 3x 3, determinan matriks *B* ini didefinisikan sebagai berikut menggunakan kaidah Sarrus.

Jika $B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$, maka determinan

matriks *B* adalah

$$|B| = \left| \begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix} \right| \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix} = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$$

C. 2. Invers Matriks

- Matriks persegi A mempunyai invers, jika ada matriks B sedemikian hingga $AB = BA = I_{n x n}$ dengan I matriks identitas. Pada persamaan $AB = BA = I_{nxn}$, A dan B disebut *saling invers*. Berikut ini adalah syarat suatu matriks A mempunyai invers.

- Jika $|A| = 0$, maka matriks *A* tidak mempunyai invers. Oleh karena itu, dikatakan matriks *A* sebagai matriks singular.
- Jika $|A| = 0$, maka matriks *A* mempunyai invers. Oleh karena itu, dikatakan matriks *A* sebagai matriks nonsingular.

Sifat-sifat invers :

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$$

$$\left(AB\right)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$$

$$\left(A^{T}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{T}$$

- Untuk matriks $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ berordo 2 x 2 ini, kita dapat menentukan inversnya sebagai berikut.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}.AdjA$$

$$= \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

a. *Matriks Minor*

- Matriks minor *Mij* diperoleh dengan cara menghilangkan elemen- elemen pada baris ke-*i* dan kolom ke-*j* matriks *A* berordo 3 × 3, sehingga didapat matriks baru dengan ordo 2 x 2. Determinan dari matriks tersebut disebut minor dari determinan matriks *A*, ditulis dengan |*Mij*|. Matriks minor *Mij* diperoleh dengan cara menghilangkan elemen- elemen pada baris ke-*i* dan kolom ke-*j* matriks *A* berordo 3 × 3, sehingga didapat matriks baru dengan ordo 2 x 2. Determinan dari matriks tersebut disebut minor dari determinan matriks *A*, ditulis dengan $|M_{ij}|$.

- Misal matriks

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

- Minor-minor dari matriks *A* adalah sebagai berikut.

$$|M_{11}| = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad |M_{21}| = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad |M_{31}| = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$|M_{12}| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \quad |M_{22}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \quad |M_{32}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$|M_{13}| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad |M_{23}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad |M_{33}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

b. Kofaktor

- Kofaktor dari baris ke-*i* dan kolom ke-*j* dituliskan dengan *Aij*. Untuk menentukannya ditentukan dengan rumus

$$A_{ij} = (-1)^{ixj} \left| M_{ij} \right|$$

Kofaktor-kofaktor dari matriks *A* adalah sebagai berikut.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} |M_{11}| = |M_{11}|$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} |M_{12}| = -|M_{12}|$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} |M_{13}| = |M_{13}|$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}|M_{21}|=-|M_{21}|$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}|M_{22}|=|M_{22}|$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}|M_{23}|=-|M_{23}|$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}|M_{31}|=|M_{31}|$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}|M_{32}|=-|M_{32}|$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}|M_{33}|=|M_{33}|$$

c. *Adjoint*

- Misalkan suatu matriks *A* berordo *n* x *n* dengan *Aij* kofaktor dari matriks *A*, maka

$$Adjoint\, A(AdjA) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$