

MATEMATIKA DISKRIT

Pertemuan 6

Egi Safitri, S.Mat., M.Si
Institut Informatika dan Bisnis Darmajaya, Bandar Lampung

26 Oktober 2023

1 Relasi

- Definisi Relasi
- Bentuk-Bentuk Relasi
 - Relasi Secara Pemetaan
 - Relasi Secara Koordinat
 - Relasi Secara Matriks

2 Fungsi

- Definisi Fungsi
- Jenis-Jenis Fungsi
- Operasi Fungsi
- Fungsi Komposisi
- Sifat-sifat Komposisi Fungsi
- Fungsi Invers

3 Grafik Fungsi

- Menggambar Grafik Fungsi
- Grafik Fungsi Invers

Definisi Relasi

Definisi

Relasi (hubungan) antara dua himpunan A ke B adalah pemasangan anggota-anggota A dengan anggota-anggota B .

Relasi dalam matematika misalnya: lebih dari, kurang dari, setengah dari, faktor dari, dan sebagainya. Contoh: Diketahui $A = \{1, 2, 3, 4\}$ dan $B = \{1, 2, 3\}$ Jika himpunan A ke himpunan B dinyatakan relasi "Kurang dari", maka perhatikan gambar berikut :

Relasi Secara Pemetaan

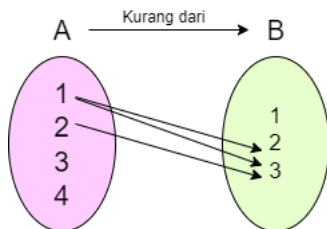
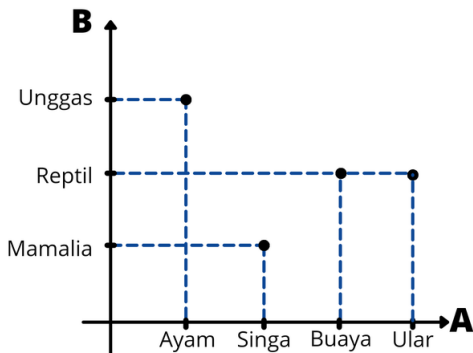


diagram di atas dinamakan diagram panah. Arah relasi ditunjukkan dengan anak panah dan nama relasinya adalah "kurang dari"

Relasi Secara Koordinat

Relasi dalam bentuk koordinat adalah cara untuk menggambarkan hubungan antara elemen-elemen dalam himpunan menggunakan pasangan nilai (koordinat). Contoh relasi dalam bentuk koordinat termasuk himpunan titik-titik dalam ruang berdimensi dua atau tiga.



Relasi Secara Matriks

Kita dapat menggambarkan relasi ini dalam bentuk matriks dengan menggunakan himpunan asal (domain) sebagai baris dan himpunan tujuan (codomain) sebagai kolom. Matriks ini disebut matriks relasi. Misalkan kita memiliki relasi berikut antara elemen dalam dua himpunan: A dan B.

$$R = \{(a, x), (b, y), (c, z)\} \quad (1)$$

Kita dapat menggambarkan relasi ini dalam bentuk matriks relasi.

Table: Matriks Relasi

	x	y	z
a	1	0	0
b	0	1	0
c	0	0	1

Di sini, angka 1 menunjukkan bahwa ada hubungan antara elemen di baris yang sesuai dengan elemen di kolom yang sesuai. Angka 0 menunjukkan bahwa tidak ada hubungan antara elemen tersebut.

Definisi Fungsi

Definition (Fungsi)

Relasi dari himpunan A ke himpunan B disebut fungsi atau pemetaan, jika dan hanya jika setiap unsur dalam himpunan A berpasangan tepat dengan satu unsur dalam himpunan B .

Notasi Fungsi

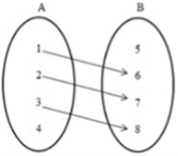
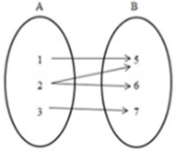
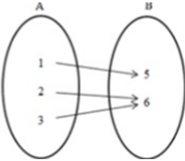
Misalkan f adalah suatu fungsi dari himpunan A ke himpunan B , maka fungsi f dilambangkan dengan :

$$f : A \rightarrow B \quad (2)$$

Definisi Fungsi

- Himpunan A dinamakan domain atau daerah definisi atau daerah asal, dinotasikan dengan D_f .
- Himpunan B dinamakan kodomain atau daerah kawan fungsi f , dinotasikan dengan K_f .
- Himpunan semua anggota B yang mempunyai kawan di A dinamakan dengan *range* atau daerah hasil, dinotasikan dengan R_f .

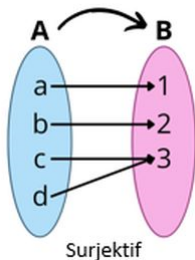
Contoh

<u>Contoh 1</u>	<u>Contoh 2</u>	<u>Contoh 3</u>
		
<p>Bukan fungsi karena terdapat anggota di A yang tidak dihubungkan dengan anggota di B</p>	<p>Bukan fungsi karena terdapat anggota di A yang dihubungkan lebih dari satu dengan anggota di B</p>	<p>Merupakan fungsi karena setiap anggota di A tepat dihubungkan dengan satu anggota di B</p>

Jenis-Jenis Fungsi

Fungsi Surjektif

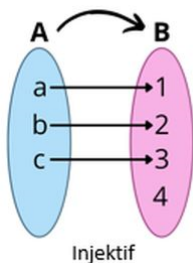
Apabila setiap anggota himpunan B mempunyai kawan anggota himpunan A, maka f disebut fungsi surjektif atau fungsi pada (onto function).



Jenis-Jenis Fungsi

Fungsi Injektif

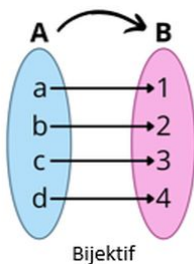
Apabila setiap anggota himpunan B mempunyai yang kawan di A, kawannya tunggal, maka f disebut fungsi injektif atau fungsi 1-1 (into function).



Jenis-Jenis Fungsi

Fungsi Bijektif

Jika setiap anggota himpunan B mempunyai tepat satu kawan di A maka f disebut fungsi bijektif atau korespondensi 1-1. Mudah dipahami bahwa korespondensi 1-1 adalah fungsi surjektif sekaligus injektif.



Operasi Fungsi

Diberikan skalar real a dan fungsi-fungsi f dan g . Jumlahan $f + g$, selisih $f - g$, hasil kali skalar $a \cdot f$, hasil kali $f \cdot g$, dan hasil bagi $\frac{f}{g}$ masing-masing didefinisikan sebagai berikut :

$$① (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$② (f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$③ (a \cdot f)(x) = a \cdot f(x)$$

$$④ (f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$$

$$⑤ \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$$

Contoh

Example

Diketahui :

$$f(x) = 2x - 4$$

$$g(x) = -3x + 2$$

Tentukan :

① $f + g$

② $f - g$

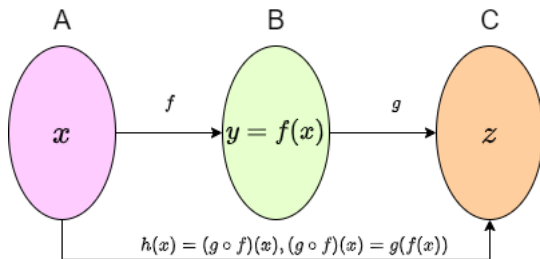
③ $f \cdot g$

④ $\frac{f}{g}$

Fungsi Komposisi

Definition

Fungsi komposisi adalah fungsi yang melibatkan lebih dari satu fungsi. Ketika ada suatu fungsi, kemudian dilanjutkan dengan fungsi lainnya, maka akan membentuk suatu fungsi baru. Fungsi baru inilah fungsi hasil komposisi dari kedua fungsi sebelumnya.



Sifat-sifat Komposisi Fungsi

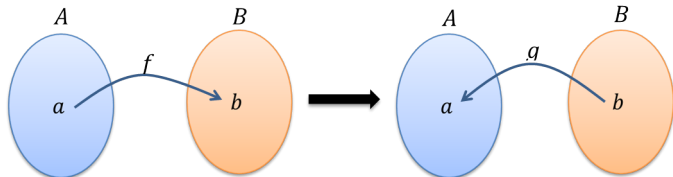
Sifat

- 1 Tidak Komutatif, $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$
- 2 Asosiatif, $(f \circ (g \circ h))(x) = ((f \circ g) \circ h)(x)$
- 3 Memiliki fungsi identitas, $(f \circ I)(x) = (I \circ f)(x) = f(x)$

Fungsi Invers

Definition

Diberikan fungsi $f : A \rightarrow B$. Kebalikan (invers) fungsi adalah relasi g dari B ke A .



Fungsi Invers

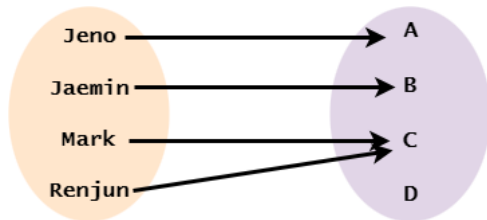
- Pada umumnya hasil invers suatu fungsi belum tentu merupakan fungsi.
- Apabila $f : A \rightarrow B$ merupakan korespondensi 1-1 maka invers fungsi f juga merupakan fungsi.
- Notasi invers fungsi adalah f^{-1}

Bentuk Fungsi Invers

Fungsi	Invers
$f(x) = ax + b$	$f^{-1}(x) = \frac{y-b}{a}$
$f(x) = x^n$	$f^{-1}(x) = \sqrt[n]{y}$
$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$	$f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$
$f(x) = ax^2 + bx + c$	$f^{-1}(x) = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4a(c-x)}}{2a}$
$f(x) = \log_a cx$	$f^{-1}(x) = \frac{a^x}{c}$
$f(x) = a^{cx}$	$f^{-1}(x) = \log_a x^{\frac{1}{c}}$

Grafik Fungsi

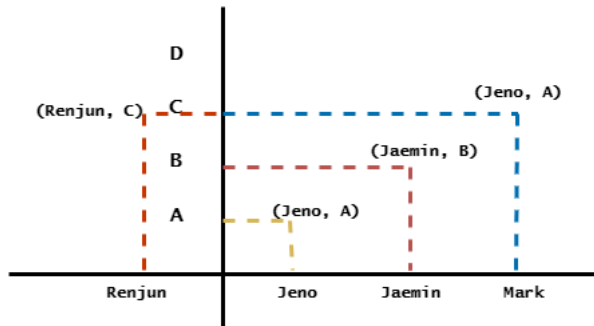
Sebelum membahas grafik fungsi secara konsep, mari kita review kembali ilustrasi mengenai fungsi $f : K \rightarrow N$ yang digambarkan sebagai berikut :



$D_f = \{\text{Jeno, Jaemin, Mark, Renjun}\}$ dan $K_f = \{A, B, C, D\}$. Nilai-nilai fungsi $f(\text{Jeno}) = A$, $f(\text{Jaemin}) = B$, $f(\text{Mark}) = C$, $f(\text{Renjun}) = C$ dan $R_f = \{A, B, C\}$

Menggambar Grafik Fungsi

Selanjutnya, membuat sistem koordinat dengan K sebagai sumbu datar dan N sebagai sumbu tegak. Pasangan terurut antara titik pada K dan N membentuk titik-titik. Himpunan titik-titik tersebut merupakan grafik fungsi $f : K \rightarrow N$ seperti berikut :

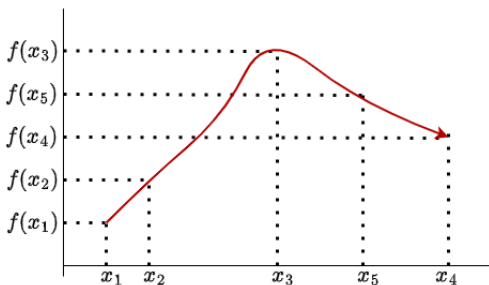


Menggambar Grafik Fungsi

Definisi

Misalkan $y = f(x)$ suatu fungsi. Grafik fungsi f didefinisikan sebagai himpunan pasangan terurut titik-titik $x, f(x) \mid x \in D(f)$.

Secara kasar, grafik fungsi dapat diperoleh dengan cara menentukan beberapa titik pasangan terurut $x, f(x)$ di sistem koordinat $-xy$, kemudian menghubungkan titik-titik tersebut seperti gambar berikut :



Menggambar Grafik Fungsi

Gambarkan grafik fungsi $y = f(x) = 2x$.

Grafik Fungsi Invers

Ada dua cara menggambar grafik fungsi invers, pertama dengan menggambar fungsi invers itu sendiri dan cara kedua dengan mencerminkan fungsi sebelum diinverskan terhadap garis $y = x$.

Contoh

Gambarkan fungsi invers dari $y = 2x + 6$

Grafik Fungsi Invers

