MATEMATIKA DISKRIT
PERTEMUAN 7

Egi Safitri, S.Mat., M.Si
Institut Informatika dan Bisnis Darmajaya, Bandar Lampung

November 09th, 2023

DAFTAR ISI

Definisi Matriks

Matriks

Matriks adalah kumpulan data yang tersusun dalam bentuk baris dan kolom. Matriks digunakan dalam berbagai aspek sains data, termasuk pengolahan data, analisis, dan pemodelan statistik.

Contoh:

- Representasi Data: Matriks dapat digunakan untuk merepresentasikan data dalam bentuk tabel dengan baris yang mewakili entitas atau sampel, dan kolom yang mewakili atribut atau fitur dari entitas tersebut. Ini sangat umum dalam penyimpanan dan manipulasi data dalam analisis sains data.
- Operasi Linier: Banyak teknik dalam sains data, seperti regresi linier, regresi logistik, dan pemrosesan sinyal, melibatkan operasi linier pada matriks. Matematika matriks memungkinkan kita untuk menerapkan algoritma ini secara efisien.

Definisi

- **Matriks** adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan yang diatur berdasarkan baris (*row*) dan kolom (*column*).
- Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan **entri** dalam matriks atau disebut juga **elemen** atau **unsur**.
- Ukuran (ordo) matriks menyatakan banyaknya baris dan kolom pada matriks tersebut.

Ordo Matriks

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 7 & -2 \\ 8 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- Ordo Matriks **A** : 3×2
- Ordo Matriks **B** : 1×4
- Ordo Matriks **C** : 4×4
- Ordo Matriks **D** : 2×1

Notasi Matriks

Matriks dinotasikan dengan huruf besar.

Jika A adalah sebuah matriks, kita dapat juga menggunakan a_{ij} untuk menyatakan entri/unsur yang terdapat di dalam baris i dan kolom j dari A sehinga $A = [a_{ij}]$

Contoh

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{A}_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

Jenis-jenis Matriks

- **Matriks nol** adalah matriks yang setiap entri atau elemennya adalah bilangan nol.

  $$\mathbf{O}_{3,2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  Sifat-sifat dari matriks nol yaitu :

  1. $\mathbf{A} + 0 = \mathbf{A}$, jika ukuran matriks $\mathbf{A}$ = ukuran matriks 0.
  2. $\mathbf{A} * 0 = 0$, begitu juga $0 * \mathbf{A} = 0$

- **Matriks bujursangkar (persegi)** adalah matriks yang berukuran $n \times n$.

  $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

- **Matriks Diagonal** adalah matriks persegi yang semua elemen diatas dan dibawah diagonalnya adalah nol. Dinotasikan sebagai **D**

  $$\mathbf{D}_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- **Matriks Skalar** adalah matriks persegi yang semua elemen diatas dan dibawah diagonalnya adalah nol. Dinotasikan sebagai **D**

  $$\mathbf{D}_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Jenis-jenis Matriks

- **Matriks Identitas** adalah matriks yang setiap entri atau elemennya adalah bilangan nol.

  $$\mathbf{I}_{3,3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  Sifat-sifat dari matriks identitas yaitu :

  1. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{A}$;
  2. $\mathbf{I} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$.

- **Matriks Segitiga Atas** adalah matriks persegi yang elemen di bawah diagonal utamanya bernilai nol.

  $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- **Matriks Segitiga Bawah** adalah matriks persegi yang elemen di atas diagonal utamanya bernilai nol

  $$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Operasi Pada Matriks

- **Penjumlahan**
  Jika **A** dan **B** adalah sembarang dua matriks yang **ukurannya sama** maka jumlah **A** + **B** adalah matriks yang diperoleh dengan menambahkan entri-entri yang bersesuaian dalam kedua matriks tersebut.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & a_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix},$$

$$\text{maka } \mathbf{A+B} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{bmatrix}$$

- Berlaku juga untuk Operasi Pengurangan pada Matriks.

Operasi Pada Matriks

- **Perkalian Skalar pada Matriks**
  Jika **A** adalah suatu matriks dan c suatu skalar, maka hasil kali $c\mathbf{A}$ adalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan masing-masing entri dari **A** oleh c
  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, maka $c\mathbf{A} = \begin{bmatrix} ca_{11} & a_{12} & ca_{13} \\ ca_{21} & ca_{22} & ca_{23} \\ ca_{31} & ca_{32} & ca_{33} \end{bmatrix}$.
- **Perkalian Matriks dengan Matriks**
  Matriks $\mathbf{A}_{m\times n}$ dapat dikalikan dengan matriks $\mathbf{B}_{n\times q}$. Jika dan hanya jika banyaknya kolom pada matriks **A** sama dengan banyaknya baris pada matriks **B**.
  $\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{B}_{n\times q} = \mathbf{C}_{m\times q}$
  $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m\times n}$
  $\mathbf{B} = [b_{ij}]_{n\times q}$
  maka : $\mathbf{C} = [c_{ij}]_{m\times q}$, dengan $c_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij}$

Soal dan Penyelesaian

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 1 & 7 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, Tentukan hasil dari $2A$!

Jawab : $2\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 1 & 7 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 1 & 7 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -26 & -5 \\ 1 & 7 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

Determinan Matriks

Definisi

Determinan adalah sebuah bilangan yang diperoleh dari suatu matriks persegi. Determinan mengukur bagaimana transformasi linier yang direpresentasikan oleh matriks tersebut mempengaruhi perubahan volume dalam ruang.

Determinan Matriks 2x2

Untuk matriks 2x2:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Determinan dapat dihitung dengan rumus:

$$\det(A) = ad - bc$$

Aturan Sarrus

Definisi

Aturan Sarrus adalah metode yang digunakan untuk menghitung determinan matriks 3x3. Determinan digunakan untuk mengukur pengaruh transformasi linier yang direpresentasikan oleh matriks pada perubahan volume dalam ruang.

Determinan Matriks 3x3 dengan Aturan Sarrus

Untuk matriks 3x3:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Determinan dapat dihitung dengan aturan Sarrus sebagai berikut:

$$\det(A) = ae(i - fh) - bd(i - fg) + cg(d - eg)$$

Contoh Soal dan Penyelesaian

Soal: Determinan Matriks 3x3 dengan Aturan Sarrus

Hitung determinan matriks berikut menggunakan aturan Sarrus:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 1 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian

Untuk matriks A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Determinan dapat dihitung dengan rumus aturan Sarrus:

$$\det(A) = 1 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 \cdot 3 - 1 \cdot 4 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 2 = 11$$

Aturan Minor dan Kofaktor

Aturan Minor dan Kofaktor

Untuk matriks 3x3:

$$B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Determinan dapat dihitung dengan aturan minor dan kofaktor:

$$\det(B) = a \cdot \mathrm{cof}(B_{11}) - b \cdot \mathrm{cof}(B_{12}) + c \cdot \mathrm{cof}(B_{13})$$

Kofaktor

Kofaktor dari elemen a_{ij} dalam matriks adalah determinan matriks minor M_{ij} dikalikan dengan $(-1)^{i+j}$.

Contoh Soal dan Penyelesaian

Soal: Determinan Matriks 3x3

Hitung determinan matriks berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian

Untuk matriks A:

$$\det(A) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Determinan dapat dihitung menggunakan rumus minor dan kofaktor:

$$\det(A) = 1(-2) - 2(-8) + 3(-1) = 11$$