

KOMBINATORIAL DAN PELUANG DISKRIT

PERTEMUAN 13-14



EGI SAFITRI, S.MAT., M.SI

INSTITUT INFORMATIKA DAN BISNIS DARMAJAYA

KOMBINATORIAL

Kombinatorial adalah cabang Matematika yang mempelajari pengaturan objek-objek.

Solusi yang diperoleh dengan kombinatorial adalah jumlah cara pengaturan objek-objek tertentu di dalam himpunannya.

PERCOBAAN

Kombintorial didasarkan pada hasil yang diperoleh dari suatu percobaan

Contoh:

Percobaan dan hasilnya :

1. Melempar dadu
2. Melempar koin uang Rp 100,-
3. Memilih 5 orang wakil
4. Menyusun jumlah kata yang panjangnya 5 huruf

KAIDAH DASAR MENGHITUNG

Contoh:

- Kaidah dasar menghitung yang digunakan dalam kombinatorial : kaidah perkalian dan kaidah penjumlahan.
- Kaidah perkalian dan kaidah penjumlahan dapat diperluas hingga mengandung lebih dari dua percobaan.

Kaidah Perkalian

Bila percobaan 1 **dan** percobaan 2 dilakukan, maka terdapat $p \times q$ hasil percobaan (atau menghasilkan $p \times q$ kemungkinan jawaban).

Kaidah Penjumlahan

bila hanya satu percobaan saja yang dilakukan (percobaan 1 **atau** percobaan 2), terdapat $p + q$ kemungkinan hasil percobaan (menghasilkan $p + q$ kemungkinan jawaban) yang mungkin terjadi.

CONTOH

Misalkan 2 buah dadu yang berbeda warnanya (merah dan biru) dilontarkan. Ada berapa macam cara untuk mendapatkan jumlah angka 4 atau 8 ?

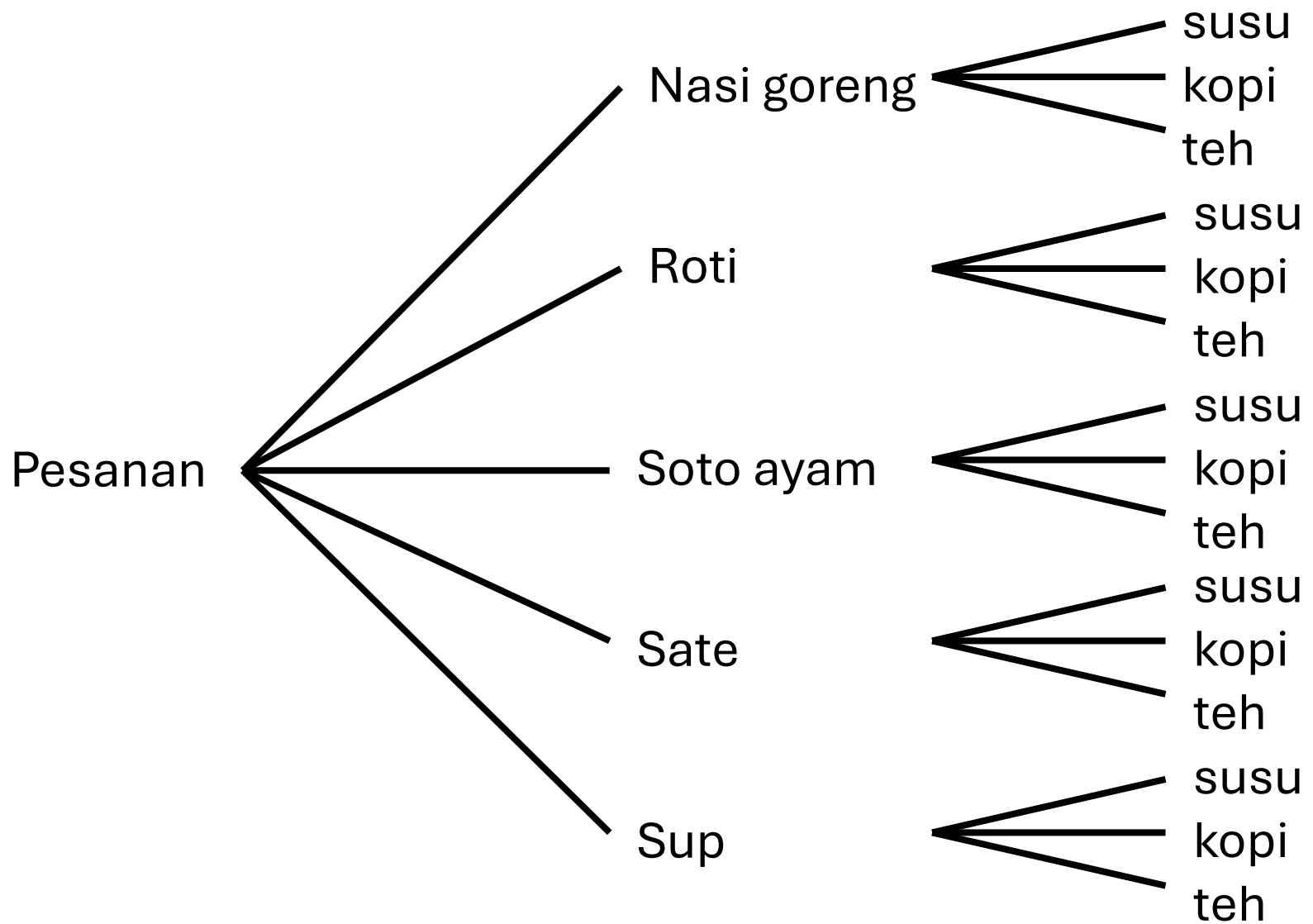
Merah/ Putih	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)				(2,6)
3	(3,1)				(3,5)	
4	(4,1)			(4,4)		
5	(5,1)		(5,3)			
6	(6,1)	(6,2)				(6,6)

Jadi untuk mendapatkan jumlah angka 4 atau 8 adalah $3 + 5 = 8$ cara

CONTOH

Sebuah restoran menyediakan lima jenis makanan, misalnya nasi goreng, roti, soto ayam, sate dan sup, serta ketiga jenis minuman yaitu susu, kopi, dan teh. Jika setiap orang boleh memesan satu makanan dan satu minuman, berapa n banyak pasangan makanan dan minuman yang dapat dipesan?

Dari persoalan diatas, kita dapat menggunakan diagram pohon untuk menentukan jumlah pasangan makanan dan minuman yang akan dipesan.



PERLUASAN KAIDAH MENGHITUNG

Jika n percobaan masing – masing mempunyai p_1, p_2, \dots, p_n
hasil percobaan yang mungkin terjadi yang dalam hal ini setiap
 p_1 tidak bergantung pada pilihan sebelumnya,
maka jumlah hasil percobaan yang mungkin terjadi adalah :

- a. $p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n$ (kaidah perkalian)
- b. $p_1 + p_2 + \dots + p_n$ (kaidah penjumlahan)

CONTOH

Jika ada sepuluh pertanyaan yang masing – masing bisa dijawab benar atau salah, berapakah kemungkinan kombinasi jawaban yang dibuat

$\frac{B/S}{1}$	$\frac{B/S}{2}$	$\frac{B/S}{3}$	$\frac{B/S}{4}$	$\frac{B/S}{5}$	$\frac{B/S}{6}$	$\frac{B/S}{7}$	$\frac{B/S}{8}$	$\frac{B/S}{9}$	$\frac{B/S}{10}$
-----------------	-----------------	-----------------	-----------------	-----------------	-----------------	-----------------	-----------------	-----------------	------------------

CONTOH

Misal terdapat 6 buah buku berbahasa inggris, 8 buah buku berbahasa perancis, dan 10 buah buku berbahasa jerman. Masing

– masing buku berbeda judulnya. Berapa jumlah cara memilih :

- a. 3 buah buku, masing – masing dari tiap buah buku yang berbeda bahasa, yakni Jumlah cara memilih 3 buah buku, masing-masing dari tiap bahasa adalah $(6)(8)(10) = 480$ cara.
- b. 1 buku sembarang Bahasa yakni : cara memilih 1 buah buku (sembarang bahasa) = $6 + 8 + 10 = 24$ cara

CONTOH

Jika terdapat 64 posisi pengisian bit yang masing-masing memiliki 2 kemungkinan nilai, 0 atau 1, maka jumlah kombinasi kunci yang harus dicoba adalah :

$$\begin{aligned} (2)(2)(2)(2)(2)\cdots(2)(2) \text{ (sebanyak 64 kali)} &= 2^{64} \\ &= 18.446.744.073.709.551.616 \end{aligned}$$

CONTOH

Suatu bilangan dibentuk dari angka-angka berikut:

2, 3, 4, 5, 7, 8, dan 9



7 angka

Misalkan pengulangan angka tidak dibolehkan. Berapa banyak bilangan 4 angka yang kurang dari 5000 namun habis dibagi 5 yang dapat dibentuk dari angka-angka tersebut?

Ada 4 angka bilangan yang akan dibentuk : _ _ _ _

Karena disyaratkan bilangan kelipatan 5, maka angka paling kanan hanya dapat diisi dengan angka 5 saja (satu cara) \rightarrow _ _ _ 5

Angka posisi ke 1 dapat diisi dengan 3 cara (yaitu 2, 3 dan 4) \rightarrow
< 5000

Angka posisi ke 2 dapat diisi dengan 5 cara (2 angka lain sudah dipakai untuk posisi ke 1 dan ke 4) $7 - 2 = 5$

Angka posisi ke 3 dapat diisi dengan 4 cara (3 angka lain sudah dipakai untuk posisi ke 1, ke 2 dan ke 4) $7 - 3 = 4$

Karena seluruh posisi angka harus terisi, maka kita menggunakan kaidah perkalian, yaitu $3 \times 5 \times 4 \times 1 = 60$ buah.

PRINSIP INKLUSI-EKSKLUSI

Informasi terkecil yang dapat disimpan di dalam memori komputer adalah *byte*.
Setiap byte disusun oleh 8-bit.

Berapa banyak jumlah byte yang dimulai dengan '11'
atau berakhir dengan '11' ?

Misalkan :

A = himpunan byte yang dimulai dengan '11'

B = himpunan byte yang diakhiri dengan '11'

$A \cap B$ = himpunan byte yang berawal **dan**
berakhir dengan '11'

$A \cup B$ = himpunan byte yang berawal dengan '11' atau berakhir dengan '11'

Jumlah byte yang dimulai dengan '11' adalah $2^6 = 64$ buah, karena 2 posisi pertama sudah diisi dengan '11', sehingga cukup mengisi 6 posisi bit sisanya.

Jadi $|A| = 64$

1 1 - - - - - → 8 bit

Jumlah byte yang diakhiri dengan '11' adalah $2^6 = 64$ buah,

Jadi $|B| = 64$

- - - - - 1 1

Jumlah byte yang berawal **dan** berakhir dengan '11' ada $2^4 = 16$ buah, karena 2 posisi pertama dan 2 posisi terakhir sudah diisi dengan '11', sehingga tinggal mengisi 4 posisi bit di tengah saja. Jadi $|A \cap B| = 16$

1 1 - - - 1 1

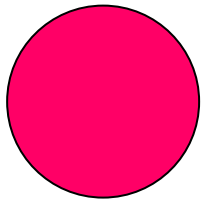
Menggunakan prinsip inklusi-eksklusi

$$\begin{aligned} |A \cup B| &= |A| + |B| - |A \cap B| = 2^6 + 2^6 - 2^4 \\ &= 64 + 64 - 16 = 112 \text{ buah} \end{aligned}$$

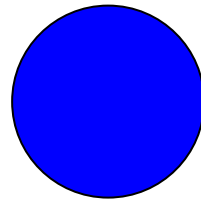
PERMUTASI

Definisi : Permutasi adalah jumlah urutan berbeda dari pengaturan objek-objek.

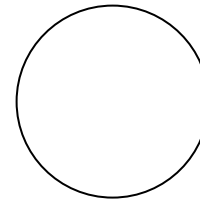
Bola :



m



b



p

Kotak :



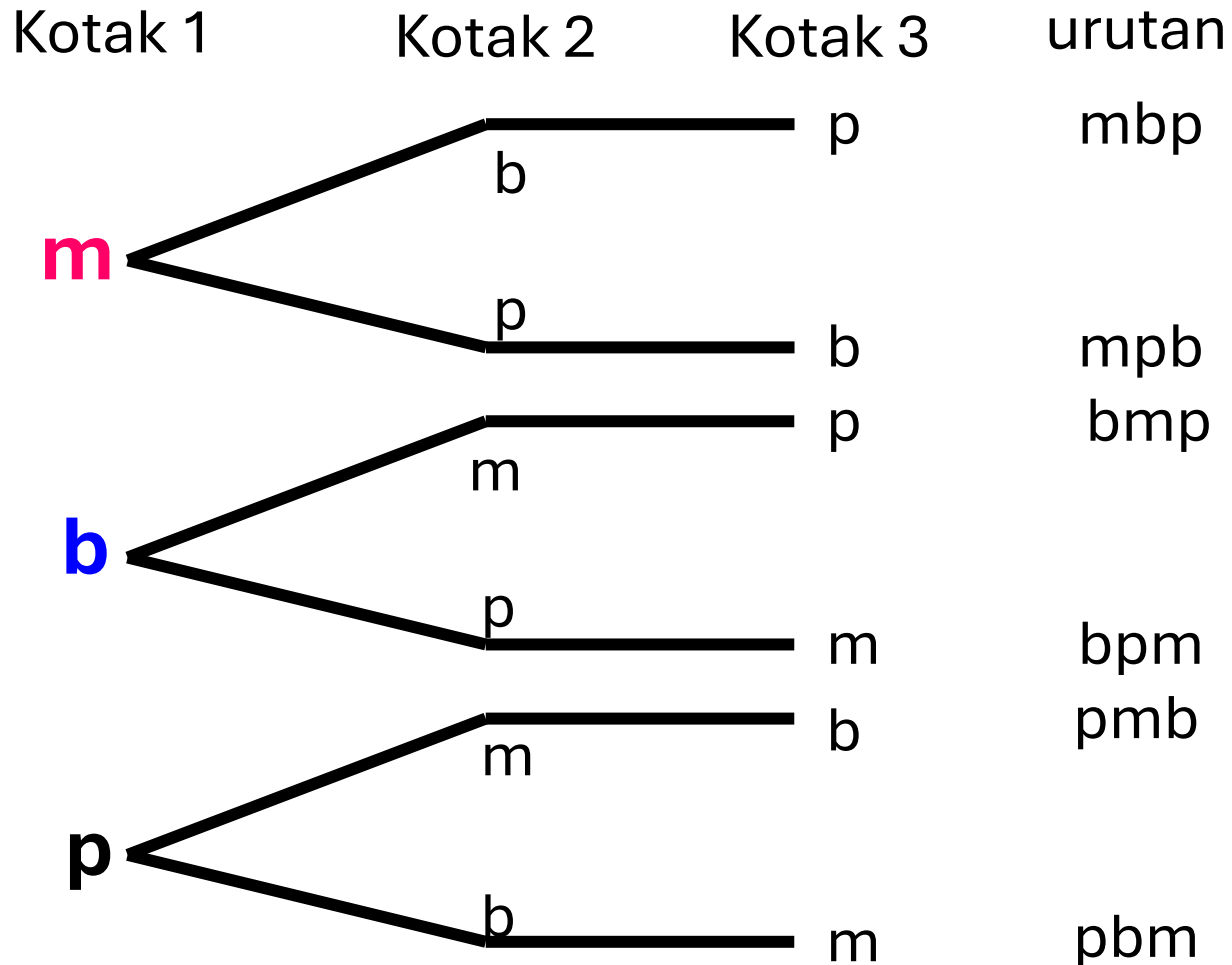
1



2



3



Kemungkinan urutan berbeda $(3)(2)(1) = 3! = 6$ buah

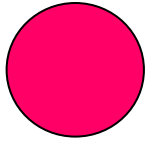
DEFINISI

- Permutasi adalah jumlah urutan berbeda dari pengaturan objek-objek.
- Permutasi merupakan bentuk khusus aplikasi aturan perkalian.
- Menurut kaidah perkalian permutasi dari n objek adalah :

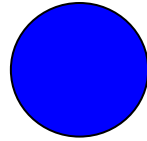
$$n(n - 1) (n - 2) \dots \dots (2)(1) = n!$$

CONTOH

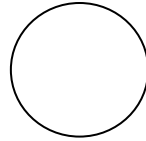
Bola :



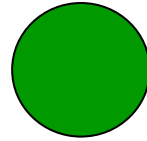
m



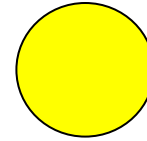
b



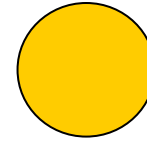
p



h



k



j

Kotak :



1



2



3

Kemungkinan urutan berbeda $(6)(5)(4) = 120$ buah

Jika contoh dirampatkan (bentuk secara umum) sehingga ada n buah bola yang berbeda warnanya dan r buah kotak ($r \leq n$), maka

Kotak ke-1 dapat diisi oleh salah satu dari n bola (ada n pilihan)

Kotak ke-2 dapat diisi oleh salah satu dari $(n - 1)$ bola (ada $n-1$ pilihan)

Kotak ke-3 dapat diisi oleh salah satu dari $(n - 2)$ bola (ada $n-2$ pilihan)

Kotak ke- r dapat diisi oleh salah satu dari $(n - (r-1))$ bola (ada $n-r+1$ pilihan)

Menurut kaidah perkalian, jumlah urutan berbeda dari penempatan bola adalah $\rightarrow n(n - 1)(n - 2) \dots (n - (r - 1))$

Permutasi-r

Jumlah susunan berbeda dari pemilihan r objek yang diambil dari n objek disebut permutasi-r, dilambangkan dengan $P(n, r)$, yaitu :

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n - r)!} \quad r \leq n$$

DEFINISI

Definisi : Permutasi r dari n elemen adalah jumlah kemungkinan urutan r buah elemen yang dipilih dari n buah elemen, dengan $r \leq n$. Dalam hal ini pada setiap kemungkinan urutan **tidak ada elemen yang sama**.

CONTOH

Jumlah cara memasukkan 6 buah bola yang berbeda warnanya ke dalam 3 buah kotak adalah

$$P(6,3) = \frac{6!}{(6-3)!} = 120$$

Jumlah kemungkinan urutan 2 dari 3 elemen himpunan $A = \{a, b, c\}$ adalah

$$P(3,2) = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$$

CONTOH

Selanjutnya bila $r = n$, maka diperoleh:

$$P(n, n) = \frac{n!}{(n - n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$$

CONTOH

Berapa banyak “ kata “ yang terbentuk dari kata **BOSAN** ?

Cara 1 : $(5)(4)(3)(2)(1) = 120$ buah kata

Cara 2 : $P(5, 5) = 5! = 120$ buah kata

CONTOH

Berapa banyak cara penyusunan 15 puzzle seperti contoh dibawah ini?

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Cara 1 : $P(16, 15) \rightarrow$ salah, karena sel kosong tidak dianggap sebagai sebuah objek berbeda dari yang lain.

$P(16, 16) = 16! \rightarrow$ betul

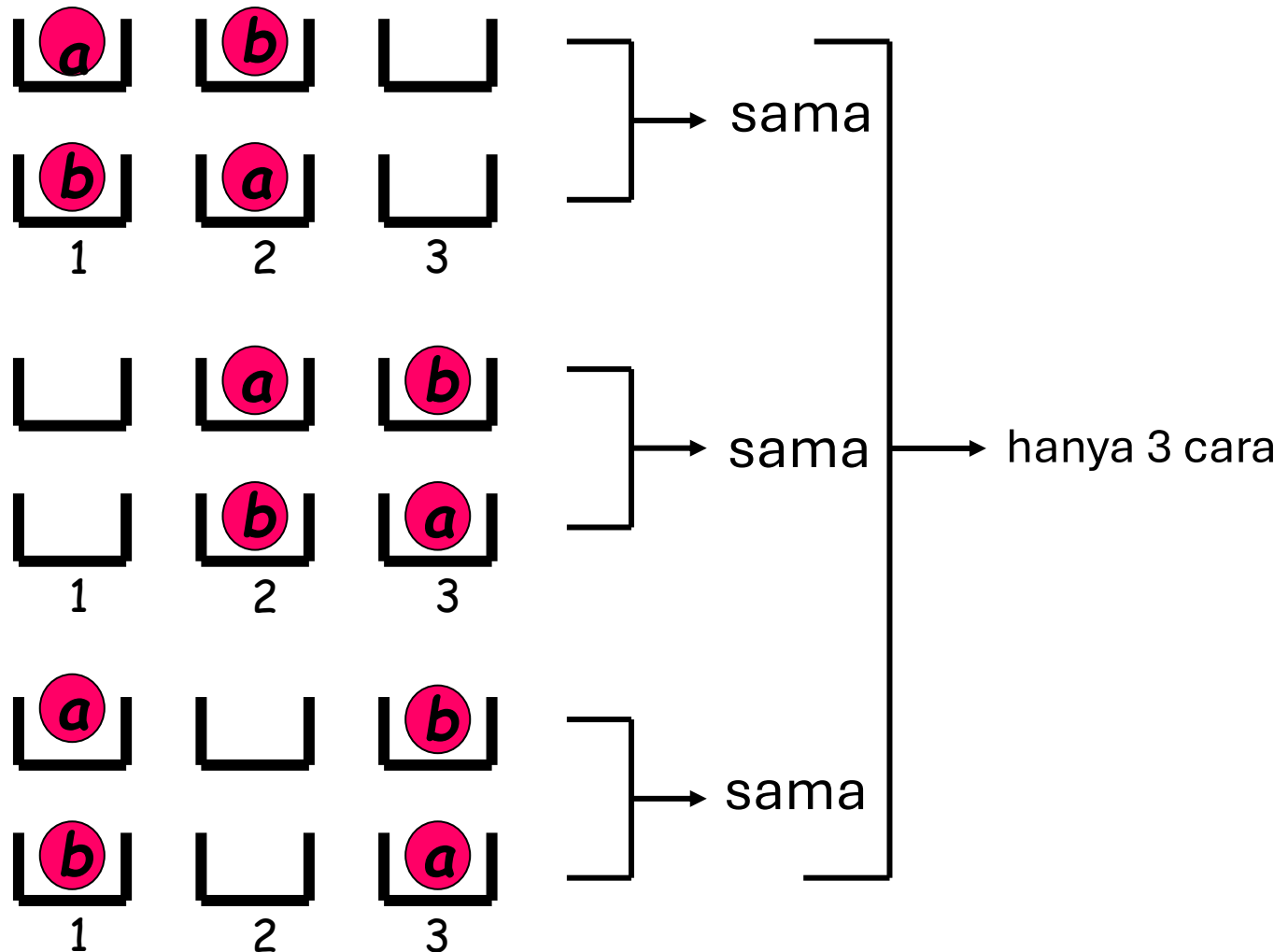
KOMBINASI

CONTOH

- Kombinasi adalah bentuk khusus dari permutasi.
- Jika pada permutasi urutan kemunculan diperhitungkan, maka pada kombinasi **urutan kemunculan diabaikan**.
- Urutan abc, bca dan acb **dianggap sama** dan **dihitung sekali**.

CONTOH

Misalkan ada 2 buah bola yang warnanya sama



CONTOH

Jumlah cara memasukkan **2 buah bola yang warnanya sama** ke dalam **3 buah kotak**

$$\frac{P(3,2)}{2!} = \frac{3!}{2!} = \frac{(3)(2)}{2} = 3.$$

Sekarang bila jumlah bola **3** dan jumlah kotak **10**, maka jumlah cara memasukkan bola ke dalam kotak adalah

$$\frac{P(10,3)}{3!} = \frac{10!}{3!} = \frac{(10)(9)(8)}{3!}$$

Karena ada **3!** cara memasukkan bola yang **warnanya merah** semua.

Secara umum, jumlah cara memasukkan r buah bola yang **berwarna sama** ke dalam n buah kotak adalah

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(r-1))}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Rumus $C = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ disebut rumus **kombinasi- r** ,

dan dilambangkan dengan $C(n, r)$ atau $\binom{n}{r}$

Kombinasi-r

- Kombinasi r elemen dari n elemen adalah jumlah pemilihan yang tidak terurut r elemen yang diambil dari n buah elemen.
- Rumus :

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$C(n, r)$ dibaca “ n diambil r ”, artinya r objek diambil dari n buah objek

INTERPRETASI KOMBINASI

Misalkan $A = \{1, 2, 3\}$

Jumlah himpunan bagian dengan 2 elemen yang dapat dibentuk dari himpunan A ada 3 buah, yaitu :

$$\begin{array}{l} \{1, 2\} = \{2, 1\} \\ \{1, 3\} = \{3, 1\} \\ \{2, 3\} = \{3, 2\} \end{array} \quad \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \quad 3 \text{ buah}$$

atau
$$\binom{3}{2} = \frac{3!}{(3-2)!2!} = \frac{3!}{1!2!} = 3 \text{ buah}$$

CONTOH

Ada berapa cara dapat memilih 3 dari 4 elemen himpunan $A = \{a, b, c, d\}$?

Ini adalah persoalan **kombinasi** karena **urutan kemunculan** ketiga elemen tersebut **tidak penting**

Himpunan bagian A dengan 3 elemen	Permutasi setiap himpunan bagian
$\{a, b, c\}$	$abc, acb, bca, bac, cab, cba$
$\{a, b, d\}$	$abd, adb, bda, bad, dab, dba$
$\{a, c, d\}$	$acd, adc, cda, cad, dac, dca$
$\{b, c, d\}$	$bcd, bdc, cdb, cbd, dbc, dcb$

Untuk setiap 3 elemen ada $3! = 6$ urutan yang berbeda (permutasi $P = n!$).

Jadi jumlah cara memilih 3 dari 4 elemen himpunan adalah

$$C(4,3) = \frac{4!}{3!(4-3)!} = 4$$

yaitu himpunan $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, c, d\}$, dan $\{b, c, d\}$.

CONTOH

Sebuah koin yang mempunyai sisi A dan sisi B di lempar keatas sebanyak 4 (empat) kali.

Berapakah jumlah kemungkinan munculnya sisi A sebanyak 3(tiga) kali?

Penyelesaian :

Ini adalah persoalan dari kombinasi karena kita tidak mementingkan kapan sisi A tersebut muncul.

Jadi, jumlah kemungkinan munculnya sisi A sebanyak 3(tiga) kali adalah

$$C(4,3) = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{(4) 3!}{3! \cdot 1!} = 4$$

CONTOH

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Panitia : 6 orang, jumlah wanita lebih banyak dp jumlah pria

Panitia terdiri dari 5 wanita, 1 pria →

dapat dibentuk dengan $C(10,5) \times C(8,1)$

Panitia terdiri dari 4 wanita, 2 pria →

dapat dibentuk dengan $C(10,4) \times C(8,2)$

Panitia terdiri dari 6 wanita, 0 pria →

dapat dibentuk dengan $C(10,6) \times C(8,0)$

Jumlah cara pembentukan panitia seluruhnya = $C(10,5) \times C(8,1) + C(10,4) \times C(8,2) + C(10,6) \times C(8,0)$

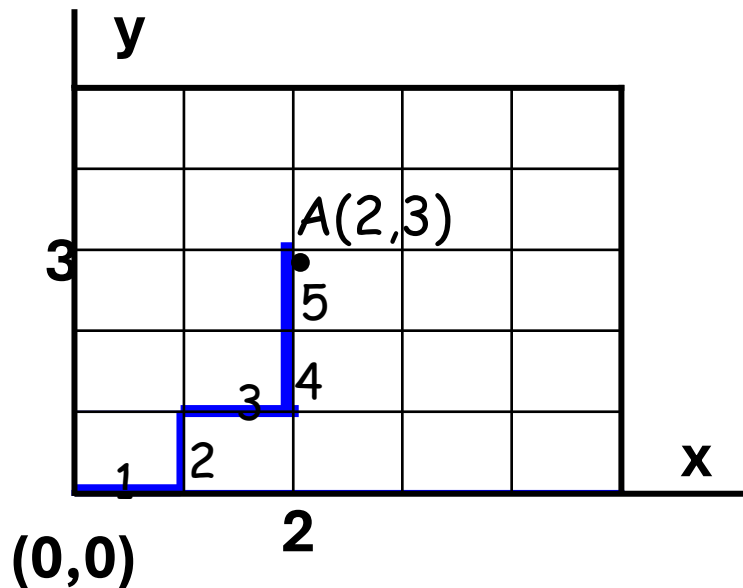
Andaikan apartemen A, B, C ditempati masing-masing oleh 4, 3 dan 3 orang mahasiswa. Jumlah cara menyewakan = $C(10,4) \times C(6,3) \times C(3,3)$

Andaikan apartemen A, B, C ditempati masing-masing oleh 3, 4 dan 3 orang mahasiswa. Jumlah cara menyewakan = $C(10,3) \times C(7,4) \times C(3,3)$

Andaikan apartemen A, B, C ditempati masing-masing oleh 3, 3 dan 4 orang mahasiswa. Jumlah cara menyewakan = $C(10,3) \times C(7,3) \times C(4,4)$

$$\begin{aligned} \text{Total seluruh cara menyewakan} &= C(10,4)C(6,3) + C(10,3)C(7,4) + \\ &\quad C(10,3)C(7,3) \\ &= 3C(10,4)C(6,3) \end{aligned}$$

Contoh



Gambar 1

Panjang lintasan = $m + n$ langkah
(m horizontal dan n vertikal)

Contohnya, pada gambar 1

Panjang lintasan dari $(0,0)$ ke $A(2,3)$
 $= 2 + 3 = 5$

Banyaknya lintasan =

$$= C(2 + 3, 2) = C(5, 2) = \frac{5!}{(2!)(3!)} = 10$$

$$= C(2 + 3, 3) = C(5, 3) = \frac{5!}{(3!)(2!)} = 10$$

PERMUTASI DAN KOMBINASI BENTUK UMUM

Kita mempunyai n buah bola yang **tidak seluruhnya berbeda warna** (jadi, ada **beberapa bola yang warnanya sama** – *indistinguishable*). Misalkan dari **n buah bola** itu terdapat

n_1 bola diantaranya berwarna 1,

n_2 bola diantaranya berwarna 2,

n_k bola diantaranya berwarna k ,

dan $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$

Dengan demikian, **permutasi** n buah bola yang mana
 n_1 diantaranya berwarna 1,
 n_2 bola berwarna 2,...
 n_k bola berwarna k adalah :

$$P(n; n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{P(n, n)}{n_1! n_2! \dots n_k!} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

Jumlah **cara pengaturan** seluruh bola kedalam kotak

$$C(n; n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! n_3! \dots n_k!}$$

Dinamakan **kombinasi bentuk umum** (*generalized combination*)

Kita dapat melihat bahwa **tidak ada** perbedaan antara **permutasi bentuk umum** dengan **kombinasi bentuk umum**.
Keduanya dapat dihitung dengan rumus yang sama

$$P(n; n_1, n_2, \dots, n_k) = C(n; n_1, n_2, \dots, n_k) \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$