Mathematics for Data Science

SSD23402

Chapter 14

Egi Safitri, S.Mat., M.Si

egisafitri@darmajaya.ac.id

November 07th, 2023

Daftar Isi

Turunan Pertama

Konsep turunan terbagi menjadi dua yaitu: turunan pada **titik** dan turunan pada **selang**. Masing-masing konsep tersebut didefinisikan sebagai berikut.

Definisi

1. Turunan pertama fungsi $f(x)$ terhadap x di **titik** $x = x_0$, ditulis dan didefinisikan $f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ (apabila nilai limitnya ada)
2. Apabila $f(x)$ memiliki turunan untuk semua x dalam suatu **selang** *I*, maka dikatakan bahwa $f(x)$ **terturunkan** untuk semua x dalam *I* dan ditulis $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Notasi Turunan

Apabila ditulis $y = f(x)$, maka:

- Turunan pertama dapat ditulis $f'(x_0)$ atau $y'(x_0)$ atau $\frac{df(x_0)}{dx}$;
- Cara lain penulisan $f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ adalah $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ atau $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$;
- Turunan pertama $f'(x)$ dapat ditulis $\frac{dy}{dx}$ atau $y'(x)$ atau y' atau $\frac{df(x)}{dx}$.

Fungsi $f(x)$ yang dapat diturunkan atau memiliki turunan di $x = x_0$ disebut fungsi yang **diferensiabel**, **terturunkan**, atau **terdiferensialkan.**

Turunan Konstanta

Turunan konstanta adalah salah satu aturan dasar dalam kalkulus. Jika c adalah konstanta, maka turunan dari konstanta c adalah nol, yaitu:

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

Turunan dari x^n, di mana n adalah Bilangan Bulat

Turunan dari fungsi $f(x) = x^n$, di mana n adalah bilangan bulat, dapat dihitung menggunakan aturan turunan berikut:

$$\frac{d}{dx}(x^n) = n \cdot x^{n-1}$$

Ini adalah aturan turunan untuk fungsi berpangkat x. Mari kita lihat beberapa contoh soal:

1. Hitung turunan dari $f(x) = 5$.
2. Hitung turunan dari $g(x) = x^3$.

Contoh Soal (lanjutan)

Contoh 1: Hitung turunan dari $f(x) = 5$.

$$\frac{d}{dx}(5) = 0$$

Contoh 2: Hitung turunan dari $g(x) = x^3$.

$$\frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$$

Rumus-rumus Fungsi Turunan Sederhana

Table 1: Rumus-rumus turunan fungsi sederhana

No	$f(x)$	$f'(x)$	No	$f(x)$	$f'(x)$
1	c	0	11	$\cos(ax)$	$-a\sin(ax)$
2	x^n	nx^{n-1}	12	$\ln(ax)$	$\frac{1}{x}$
3	e^x	e^x	13	x^2	$2x$
4	$\sin(x)$	$\cos(x)$	14	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
5	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	15	a^x	$a^x\ln(a)$
6	$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	16	$\tan(x)$	$\sec^2(x)$
7	a	0	17	$\cot(x)$	$-\csc^2(x)$
8	x	1	18	$\sec(x)$	$\sec(x)\tan(x)$
9	e^{ax}	ae^{ax}	19	$\csc(x)$	$-\csc(x)\cot(x)$
10	$\sin(ax)$	$a\cos(ax)$	20	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$

Contoh menghitung Turunan Menggunakan Definisi

Diketahui $f(x) = 3x - 1$

1. $f'(1)$
2. $f'(a)$
3. $f'(x)$

Tentukan

$f'(x)$ dari fungsi $f(x) = \sqrt{x}$, untuk $x > 0$

Contoh 1

Diketahui $f(x) = 3x - 1$

1. $f'(1)$

Jawaban

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3(1+h) - 1 - (3\cdot 1 - 1)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{3h}{h} = \lim_{h\to 0} 3 = 3$$

Jadi, $f'(1) = 3$.

Contoh 2

Diketahui $f(x) = 3x - 1$

1. $f'(a)$

Jawaban

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3(a+h) - 1 - (3a-1)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{3h}{h} = \lim_{h \to 0} 3 = 3$$

Jadi, $f'(a) = 3$ untuk setiap nilai a.

Contoh 3

Tentukan $f'(x)$ dari $f(x) = \sqrt{x}$, untuk $x > 0$

Jawaban

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

Untuk menyelesaikan batasan ini, kita menggunakan rumus perbedaan kuadrat: $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$. Dalam hal ini, $a = \sqrt{x+h}$ dan $b = \sqrt{x}$. Jadi,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h-x)}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Jadi, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ untuk $x > 0$.

Aljabar atau operasi turunan dinyatakan sebagai berikut.

Apabila $f'(x)$ dan $g'(x)$ ada (terdefinisi), maka berlaku:

1. $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$
2. $(af)'(x) = af'(x)$
3. $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
4. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}; g(x) \neq 0$

Aturan Turunan 1

$$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$

Soal: Hitung turunan dari $h(x) = 2x^2 + 3x - 1$.

Penyelesaian

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{d}{dx}(2x^2) + \frac{d}{dx}(3x) - \frac{d}{dx}(1) \\ &= 4x + 3 \end{aligned}$$

Jadi, $h'(x) = 4x + 3$.

Aturan Turunan 2

$(af)'(x) = af'(x)$

Soal: Hitung turunan dari $p(x) = 4x^3$.

Penyelesaian

$$\begin{aligned} p'(x) &= 4\frac{d}{dx}(x^3) \\ &= 4 \cdot 3x^2 \\ &= 12x^2 \end{aligned}$$

Jadi, $p'(x) = 12x^2$.

Aturan Turunan 3

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Soal: Hitung turunan dari $q(x) = x^2 \cdot (2x + 1)$.

Penyelesaian

$$\begin{aligned} q'(x) &= \frac{d}{dx}(x^2) \cdot (2x+1) + x^2 \cdot \frac{d}{dx}(2x+1) \\ &= 2x \cdot (2x+1) + x^2 \cdot 2 \\ &= 4x^2 + 2x^2 + 2x \\ &= 6x^2 + 2x \end{aligned}$$

Jadi, $q'(x) = 6x^2 + 2x$.

Aturan Turunan 4

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)};\ g(x) \neq 0$$

Soal: Hitung turunan dari $r(x) = \frac{x^2}{3x+2}$.

Penyelesaian

$$\begin{aligned} r'(x) &= \frac{\frac{d}{dx}(x^2)\cdot(3x+2) - x^2\cdot\frac{d}{dx}(3x+2)}{(3x+2)^2} \\ &= \frac{2x\cdot(3x+2) - x^2\cdot 3}{(3x+2)^2} \\ &= \frac{6x^2+4x-3x^2}{(3x+2)^2} = \frac{3x^2+4x}{(3x+2)^2} \end{aligned}$$

Jadi, $r'(x) = \frac{3x^2+4x}{(3x+2)^2}$.

Turunan dari $(ax + b)^n$

Definisi

Turunan dari fungsi $(ax + b)^n$, di mana a dan b adalah konstanta, dan n adalah bilangan bulat, dapat dihitung menggunakan aturan turunan rantai.

Rumus Turunan

Turunan dari $(ax + b)^n$ adalah:

$$\frac{d}{dx}((ax + b)^n) = n \cdot a \cdot (ax + b)^{n-1}$$

Contoh Soal

Soal

Hitung turunan dari $f(x) = (2x+1)^3$.

Penyelesaian

Kita memiliki $a = 2$, $b = 1$, dan $n = 3$. Gunakan rumus turunan:

$$f'(x) = 3 \cdot 2 \cdot (2x+1)^{3-1}$$

$$f'(x) = 6 \cdot (2x+1)^2$$

Jadi, $f'(x) = 6(2x+1)^2$.

Aturan Rantai (Chain Rule)

Definisi

Aturan Rantai adalah aturan yang digunakan untuk menghitung turunan dari fungsi yang merupakan komposisi dari dua fungsi.

Rumus Aturan Rantai

Jika $f(u)$ dan $g(x)$ adalah fungsi, maka turunan dari fungsi komposisi $f(g(x))$ adalah:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

atau jika $y = f(u)$ dan $u = g(x)$. Jika $\frac{dy}{du}$ dan $\frac{du}{dx}$ ada, maka $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$

Contoh Soal 1

Soal

Hitung turunan dari $h(x) = \sin(2x)$.

Penyelesaian

Kita memiliki $f(u) = \sin(u)$ dan $g(x) = 2x$. Kemudian kita hitung turunan masing-masing fungsi:

$$f'(u) = \cos(u)$$

$$g'(x) = 2$$

Aturan Rantai memberikan kita rumus turunan:

$$(h(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \cos(2x) \cdot 2$$

Jadi, $h'(x) = 2\cos(2x)$.

Contoh Soal 2

Soal

Hitung turunan dari $y(x) = e^{3x^2}$.

Penyelesaian

Kita memiliki $f(u) = e^u$ dan $g(x) = 3x^2$. Turunan masing-masing fungsi adalah:

$$f'(u) = e^u$$

$$g'(x) = 6x$$

Gunakan Aturan Rantai:

$$(y(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x) = e^{3x^2} \cdot 6x$$

Jadi, $y'(x) = 6xe^{3x^2}$.

Thank You.

Egi Safitri, S.Mat., M.Si