

Integral Tak Wajar

Pertemuan Minggu ke-12

Egi Safitri, S.Mat., M.Si

Institut Informatika dan Bisnis Darmajaya

Suatu integral tertentu

$$\int_a^b f(x) dx \quad (1)$$

dikatakan **wajar** jika ia memenuhi dua syarat berikut:

- i. Batas integrasi a dan b merupakan bilangan berhingga
- ii. fungsi $f(x)$ terbatas pada interval $[a, b]$ yaitu ada $M > 0$ sebagai nilai pembatas sehingga $-M \leq f(x) \leq M$ untuk setiap $x \in [a, b]$

Bila salah satu saja dari kedua syarat tersebut tidak dipenuhi maka integral (1.1) dikatakan **tak wajar**

Definisi 1.1 Integral tak wajar (improper integral) adalah integral dengan satu atau kedua syarat berikut ini dijumpai, yaitu:

- i. Interval dari integral adalah tidak terbatas

$$[a, +\infty), (-\infty, b], (-\infty, \infty)$$

Sebagai contoh:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

- ii. Integran mempunyai suatu ketakkontinuan tak hingga di suatu titik c dalam $[a, b]$:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \pm \infty$$

Sebagai contoh:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

Dalam bidang fisika, ekonomi, probabilitas dan statistika maupun di bidang lainnya sering melibatkan integral yang didefinisikan pada domain yang tak terbatas. Kenyataan ini melahirkan integral tak wajar tipe I karena batas integrasinya memuat ∞ atau $-\infty$

Definisi 1.2

Andaikan bahwa suatu fungsi f kontinu pada $(\infty, -\infty)$. Didefinisikan integral tak wajar ketika limitnya ada

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx \quad (2)$$

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx \quad (3)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{\infty} f(x) dx \quad (4)$$

Dimana, dalam definisi (4), integral-integral di ruas kanan ada untuk suatu c . Jika integral tak wajar ada, maka integral dikatakan konvergen, tetapi jika tidak ada maka dikatakan divergen.

Contoh 1.

Fungsi $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ disebut fungsi densitas normal dan memiliki banyak aplikasi dalam bidang probabilitas dan statistik. Secara khusus

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = 1$$

Definisi 1.3

Misalkan a suatu bilangan tertentu dan diasumsikan $\int_a^N f(x)dx$ ada untuk setiap $N \geq a$. Selanjutnya jika $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_a^N f(x)dx$ ada maka nilai integral tak wajar didefinisikan sebagai

$$\int_a^{\infty} f(x)dx := \lim_{N \rightarrow \infty} \int_a^N f(x)dx$$

Selanjutnya, integral tak wajar $\int_a^{\infty} f(x)dx$ dikatakan **konvergen** jika nilainya berhingga. Selain dari itu dikatakan **divergen**

Contoh 2

Hitunglah integral tak wajar

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx \quad (5)$$

Penyelesaian:

Dengan menggunakan definisi 1.3, akan diperoleh:

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_1^N f(x) dx \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^N dx \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{N} - (-1) \right] = 1 \end{aligned}$$

Jadi, integral tak wajar ini konvergen.

Contoh 3.

Hitunglah integral tak wajar

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{3x}{(3x^2 + 2)^3} dx$$

Penyelesaian:

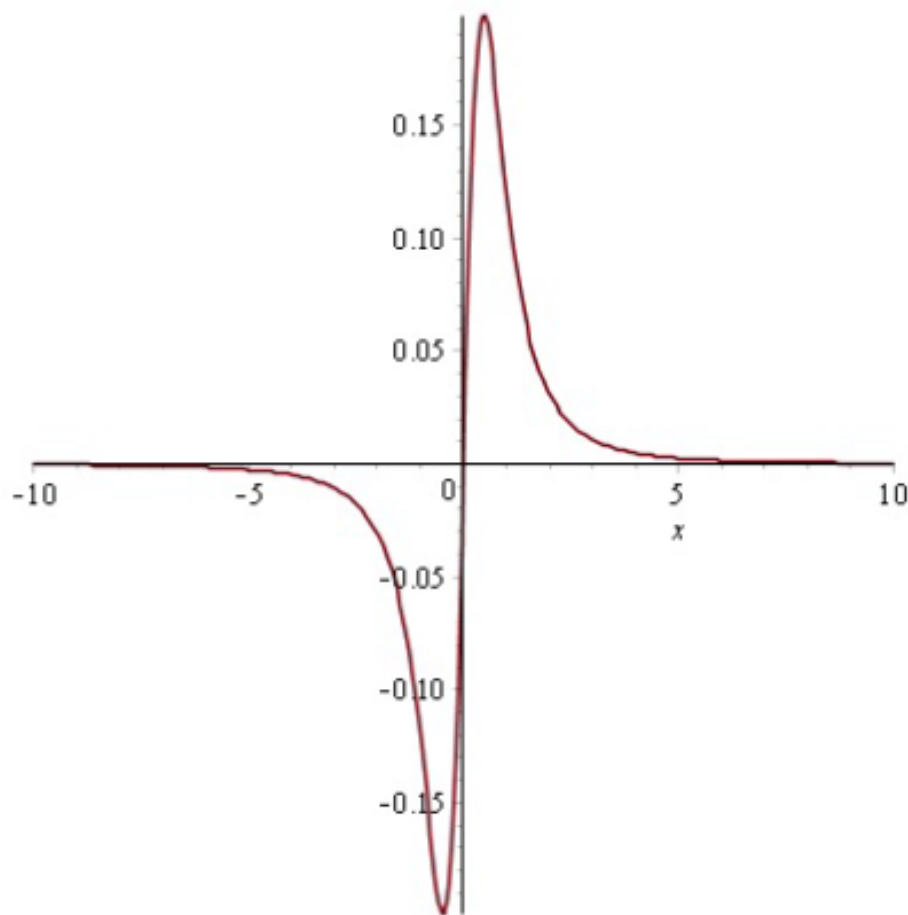
Selesaikan dahulu integral tak tentu $\int \frac{3x}{(3x^2 + 2)^3} dx$ kemudian cari limitnya. Misalkan $u = 3x^2 + 2$ maka $du = 6x dx$. Jadi $3x dx = \frac{1}{2} du$. Substitusikan pemisalan ini ke dalam integral, maka diperoleh:

$$\int \frac{3x}{(3x^2 + 2)^3} dx = \int \frac{\frac{1}{2}}{u^3} du = -\frac{\frac{1}{2}}{2u^2} = -\frac{1/4}{(3x^2 + 2)^2}$$

Selanjutnya dengan menggunakan definisi 1.3 didapatkan

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{3x}{(3x^2 + 2)^3} dx &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N \frac{3x}{(3x^2 + 2)^3} dx \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{-1/4}{(3x^2 + 2)^2} \right]_{-N}^N \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{-1/4}{(3N^2 + 2)^2} + \frac{1/4}{(3(-N)^2 + 2)^2} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Jadi, integral tak wajar ini konvergen dan bernilai nol. Khusus nilai nol integral ini didapat kenyataan bahwa terdapat dua luasan daerah yang sama tetapi satu ini di atas sumbu x dan satunya di bawah sumbu x



Contoh 4

Tentukan semua bilangan p sehingga integral tak wajar

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$$

Konvergen, dan hitunglah nilainya ?

Penyelesaian:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{1-p} [N^{1-p} - 1]$$

Bila $1 - p > 0 \rightarrow p < 1$ maka $N^{1-p} \rightarrow \infty$ untuk $N \rightarrow \infty$. Jadi,

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \frac{1}{1-p} [0 - 1] = \frac{1}{1-p} [-1] = \frac{1}{p-1} \text{ konvergen (berhingga)}$$

untuk $p - 1 = 0$, yaitu $p = 1$ integral ini divergen. Jadi dapat disimpulkan

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \begin{cases} \frac{1}{p-1}, p > 1 \\ \text{divergen}, p \leq 1 \end{cases}$$

Jadi untuk setiap $p > 1$, integral tak wajar $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$ konvergen

dengan nilai $\frac{1}{p-1}$

Integral Tak Wajar Khusus Jenis Pertama

1. Integral Geometrik atau Eksponensial

$$\int_a^{\infty} e^{tx} dx \quad (6)$$

dimana t adalah sebuah konstanta, konvergen jika $t > 0$ dan divergen jika $t \leq 0$. Perhatikanlah analogi dengan deret geometri jika $r = e^{-tx}$ sehingga $e^{-tx} = r^x$

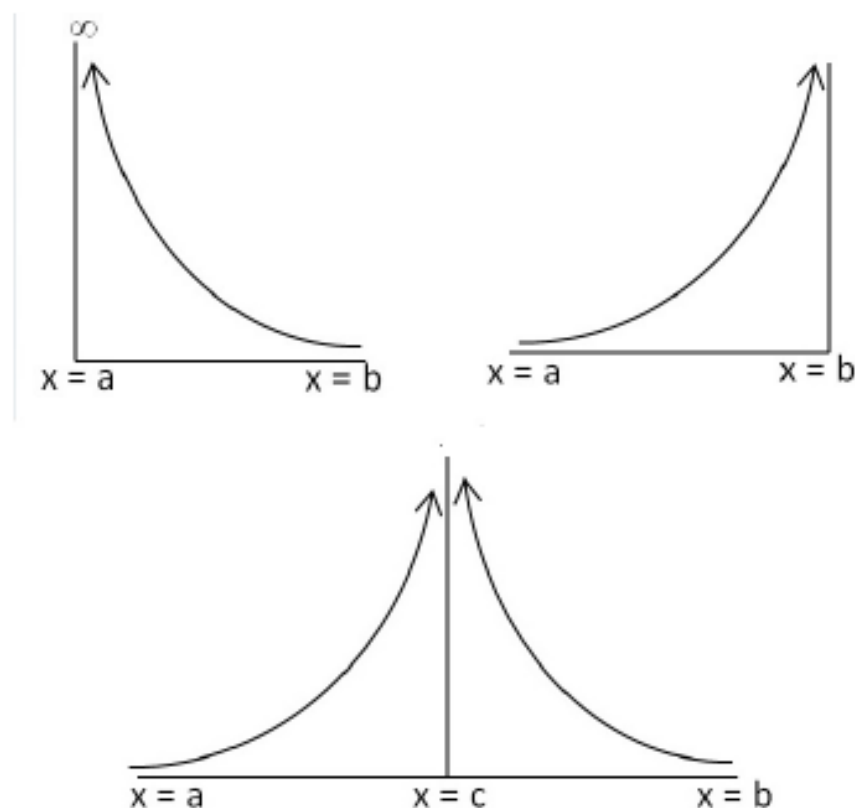
2. Integral p jenis pertama

$$\int_a^{\infty} \frac{1}{x^p} dx \quad (7)$$

dimana p adalah sebuah konstanta dan $a > 0$, konvergen jika $p > 1$ dan divergen jika $p \leq 1$.

Integral Tak Wajar Tipe II

Suatu fungsi dikatakan tak terbatas di c jika nilainya sangat besar sekali (mendekati ∞ atau $-\infty$) di sekitar c . Misalkan fungsi f didefinisikan pada domain $[a, b]$. Beberapa model fungsi tak terbatas di sekitar a , b dan titik c dengan $a < c < b$ ditunjukkan pada gambar berikut



Pada gambar sebelah kiri, fungsi f tak terbatas di titik a dari kanan. Gambar tengah menunjukkan fungsi f tak terbatas di titik b dari kiri. Sedangkan gambar sebelah kanan menunjukkan f tak terbatas di titik c dengan $a < c < b$ dari kanan dan kiri. Bila f tak terbatas pada $[a, b]$, baik di titik a dari kanan di titik b dari kiri ataupun di titik interior $[a, b]$ maka integral

$$\int_a^b f(x) dx$$

merupakan integral tak wajar, dan disebut integral tak wajar tipe II.

Definisi 1.4

Bila $f(x)$ tak terbatas di a dan $\int_a^b f(x)dx$ dan ada untuk setiap $t > a$ maka integral tak wajar didefinisikan sebagai:

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x)dx \quad (8)$$

Bila $f(x)$ tak terbatas di b dan $\int_t^b f(x)dx$ ada untuk setiap $t < b$ maka

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x)dx \quad (9)$$

Selanjutnya, bila $f(x)$ tak terbatas di c , dengan $a < c < b$ maka integral dipecah menjadi dua yaitu

$$\int_a^b f(x)dx := \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad (10)$$

Dan selanjutnya digunakan definisi integral tak wajar sebelumnya.

Selesaikan integral berikut

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx$$

coba kita kerjakan dahulu integral ini dengan cara biasa tanpa menggunakan definisi integral tak wajar. Hasilnya,

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx = \left[\frac{-1}{x} \right]_{-1}^1 = -(1 - (-1)) = -2$$

Integral ini kelihatannya konvergen, tapi cara ini salah sebab integran $f(x) = \frac{1}{x^2}$ tak terbatas di $x = 0$.

Penyelesaian

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx &= \int_{-1}^0 \frac{1}{x^2} dx + \int_0^1 \frac{1}{x^2} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^-} \int_{-1}^t \frac{1}{x^2} dx + \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 \frac{1}{x^2} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^-} \left[\frac{-1}{x} \right]_{-1}^t + \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[\frac{-1}{x} \right]_t^1 \\ &= \infty - \infty\end{aligned}$$

Ternyata integral tak wajar ini divergen, sebab $\infty - \infty$ tak terdefinisi