

Integral Lipat

Pertemuan Minggu ke-12

Egi Safitri, S.Mat., M.Si

Institut Informatika dan Bisnis Darmajaya

INTEGRAL LIPAT

➤ Integral Berulang

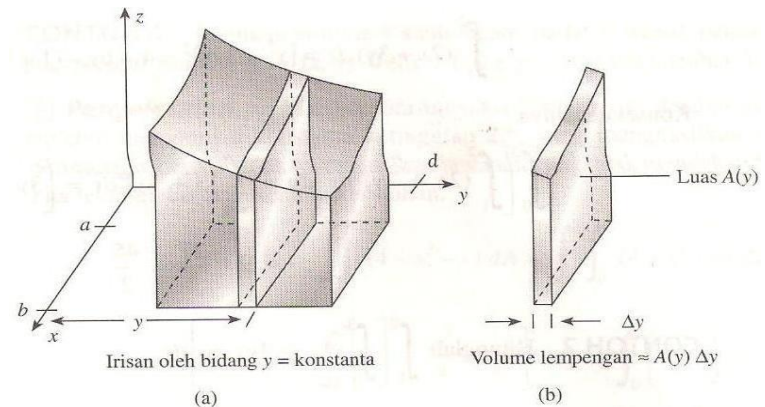
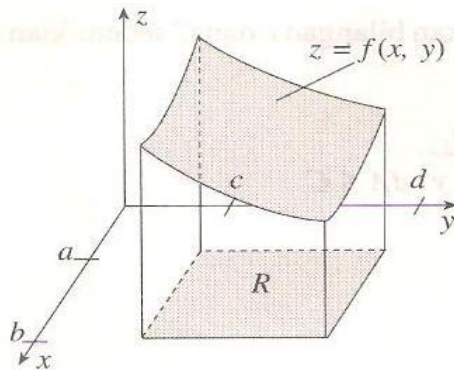
Kita dapat menginterpretasikan integral lipat dua sebagai volume V dari benda padat dibawah permukaan (persegi panjang).

$$V = \iint_R f(x, y) dA$$

Cara lain:

mengiris benda padat tersebut menjadi lempengan-lempengan tipis sejajar dengan bidang xz .

Sesuai dengan gambar di bawah ini maka:



Luas muka lempengan ini bergantung seberapa jauh lempengan tersebut dari bidang xz yaitu bergantung dari y , luas $A(y)$ dimana:

$$A(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

Volume ΔV dari lempengan tersebut dapat dihampiri dengan

$$\Delta V = A(y)\Delta y$$

maka:

$$V = \int_c^d A(y)dy \Rightarrow V = \int_c^d \int_a^b f(x, y)dxdy$$

$$V = \iint_R |f(x, y)|dA = \int_c^d \int_a^b f(x, y)dxdy$$

Cat: Apabila kita memulai proses diatas dengan mengiris benda padat tersebut dengan menggunakan bidang-bidang yang sejajar dengan bidang yz (urutan yang berlawanan)

Maka persamaannya:

$$V = \iint_R |f(x, y)| dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$$

Contoh:

1. Hitunglah $\int_0^3 \int_1^2 (2x + 3y) dx dy$

Peny:

$$\int_0^3 [x^2 + 3yx]_1^2 dy = \int_0^3 (3 + 3y) dy$$

$$\left[3y + \frac{3}{2} y^2 \right]_0^3 = 45/2$$

Hasil yang sama apabila kita tukarkan:

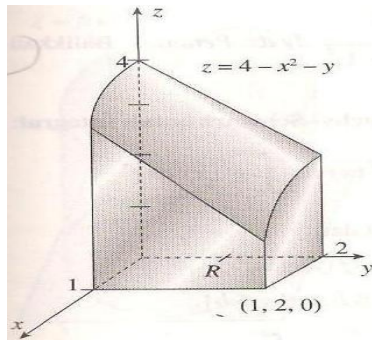
$$\int_1^2 \int_0^3 (2x + 3y) dy dx = \int_1^2 \left[2xy + \frac{3}{2} y^2 \right]_0^3 dx$$

$$\int_1^2 \left(6x + \frac{27}{2} \right) dx = \left[\frac{6}{2} x^2 + \frac{27}{2} x \right]_1^2$$
$$= 45/2$$

2. Tentukan Volume suatu benda padat dibawah permukaan $z = 4 - x^2 - y$ dan diatas persegi panjang

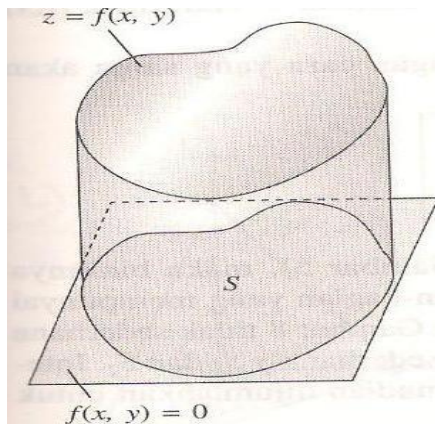
$$R = \{(x, y); 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 2\}$$

Bentuk grafiknya:



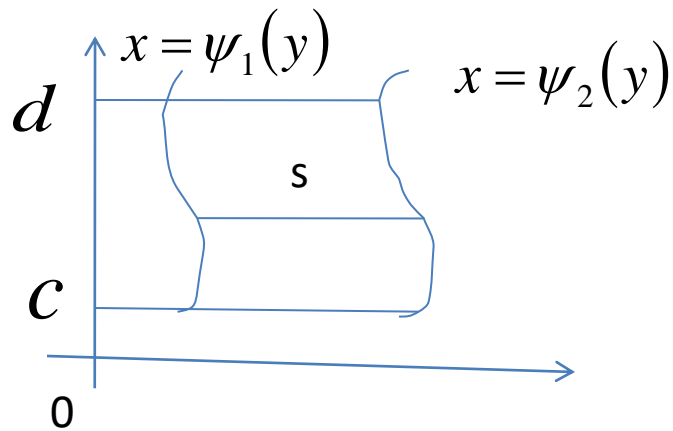
$$\begin{aligned} V &= \iint_R (4 - x^2 - y) dA = \int_0^2 \int_0^1 (4 - x^2 - y) dx dy \\ &= 8 - \frac{2}{3} - 2 = \frac{16}{3} \end{aligned}$$

➤ Integral Lipat dua atas daerah bukan persegi panjang

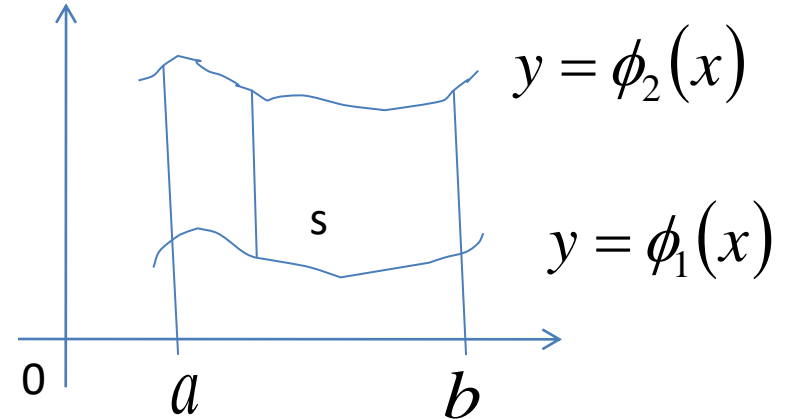


Untuk menyelesaikan batas-batas yang melengkung kita menggunakan himpunan sederhana x dan himpunan sederhana y .

Grafik himpunan sederhana x dan himpunan y :



Himp. Sederhana x



Himp. Sederhana y

Dimana:

Himpunan sederhana x : $S = \{(x, y); \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y); c \leq y \leq d\}$

Himpunan sederhana y : $S = \{(x, y); \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x); a \leq x \leq b\}$

Kita melingkupi S di dalam sebuah persegi panjang R dan membuat $f(x, y) = 0$ di luar S . Maka untuk himpunan sederhana x :

$$V = \iint_S f(x, y) dA = \int_{c \psi_1}^{d \psi_2} \int f(x, y) dx dy$$

Untuk himpunan sederhana y adalah:

$$V = \iint_S f(x, y) dA = \int_a \phi_1^b \phi_2 \int f(x, y) dy dx$$

Contoh soal:

1. Hitunglah integral berulang

$$\int_0^1 \int_0^{y^2} 2ye^x dx dy$$

Peny:

$$\int_0^1 \int_0^{y^2} 2ye^x dx dy = \int_0^1 [2ye^x]_0^{y^2} dy$$

$$= \int_0^1 2y(e^{y^2} - e^0) dy = \int_0^1 2ye^{y^2} dy - 2 \int_0^1 y dy$$

$$= \int_0^1 e^u du - 2 \int_0^1 y dy = [e^u]_0^1 - [y^2]_0^1$$

$$= e - 1 - 1 = e - 2$$

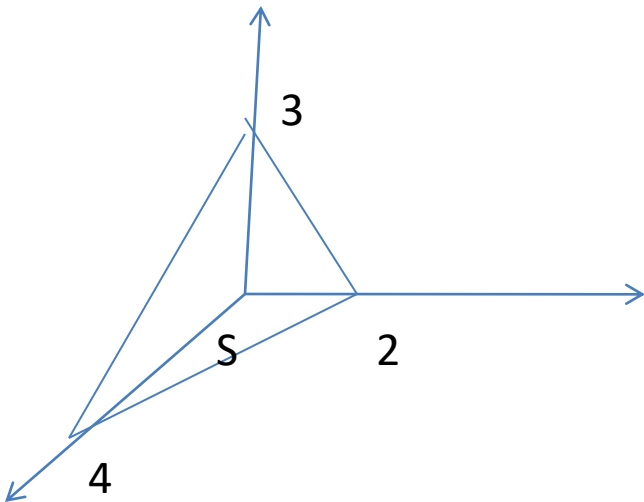
2. Gunakan integral lipat dua untuk menentukan volume dari tetrahedron yang dibatasi oleh bidang-bidang koordinat dan bidang $3x + 6y + 4z - 12 = 0$

Peny:

Perpotongan sumbu x $\longrightarrow x=4$

Perpotongan sumbu y $\longrightarrow y=2$

Perpotongan sumbu z $\longrightarrow z=3$

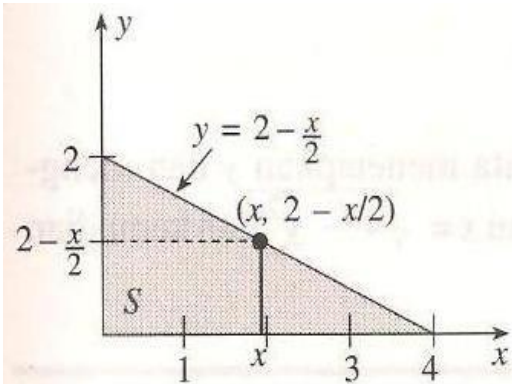


Daerah segitiga bidang xy membentuk alas tetrahedron di lambangkan dengan S. Kita akan mencari volume dibawah permukaan :

Dari pers: $3x + 6y + 4z - 12 = 0$

$$4z = 12 - 3x - 6y$$

$$z = \frac{3}{4}(4 - x - 2y) \quad \text{dan diatas daerah S}$$



Memotong bidang xy pada :

$$3x + 6y = 12 \Rightarrow 6y = 12 - 3x \Rightarrow y = 2 - \frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow 3x = 12 - 6y \Rightarrow x = 4 - 2y$$

S dapat dipandang sebagai :

$$\text{Himpunan sederhana x : } S = \left\{ (x, y); 0 \leq x \leq 4 - 2y; 0 \leq y \leq 2 \right\}$$

$$\text{Himpunan sederhana y : } S = \left\{ (x, y); 0 \leq y \leq 2; 0 \leq x \leq 4 - 2y \right\}$$

Jadi Volume dari benda padat adalah:

$$V = \int_0^4 \int_0^{2-\frac{x}{2}} \frac{3}{4} (4-x-2y) dy dx$$

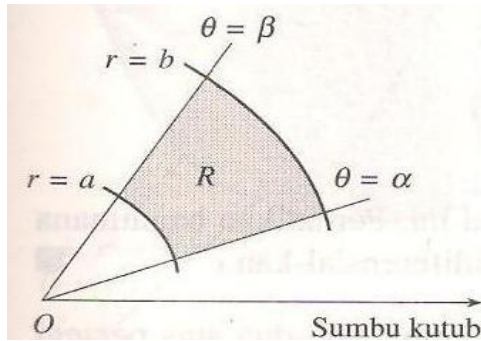
$$= \int_0^4 \frac{3}{4} [4y - xy - y^2]_0^{2-\frac{x}{2}} dx = \frac{3}{16} \int_0^4 (16 - 8x + x^2) dx$$

$$= \frac{3}{16} \left[16x - 4x^2 + \frac{1}{3} x^3 \right]_0^4$$

$$V = \frac{3}{16} \left(4^3 - 4^3 + \frac{4^3}{3} \right) = 4$$

➤ Integral Lipat Dua dalam Koordinat Kutub

Kurva-kurva tertentu pada suatu bidang seperti lingkaran, kardioid, dan mawar lebih mudah dihitung dengan menggunakan koordinat kutub.



Maka volume V benda padat di bawah permukaan ini dandi atas R dinyatakan:

$$V = \iint_R f(x, y) dA$$

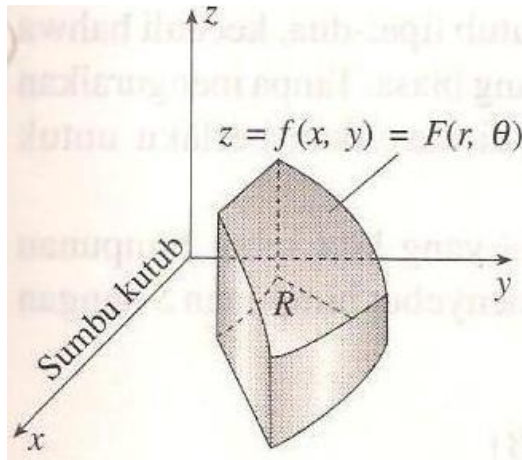
Dalam koordinat kutub, persegi panjang kutub R

$$R = \{(r, \theta); a \leq r \leq b; \alpha \leq \theta \leq \beta\}$$

dimana $a \geq 0$ dan $\beta - \alpha \leq 2\pi$

$$\begin{aligned} z &= f(x, y) = f(r \cos \theta, r \sin \theta) \\ &= f(r, \theta) \end{aligned}$$

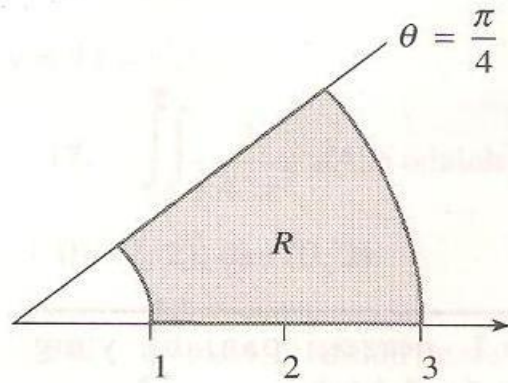
Maka volume V dalam koordinat kutub:



$$V = \iint_R f(x, y) dA = \iint_R f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

Contoh soal:

Tentukan volume V dari benda padat diatas persegi panjang kutub:



$$R = \{(r, \theta) : 1 \leq r \leq 3; 0 \leq \theta \leq \pi / 4\}$$

dan dibawah permukaan $z = e^{x^2+y^2}$

Peny:

Dik: $x^2 + y^2 = r^2$ maka
 $z = e^{r^2}$ maka

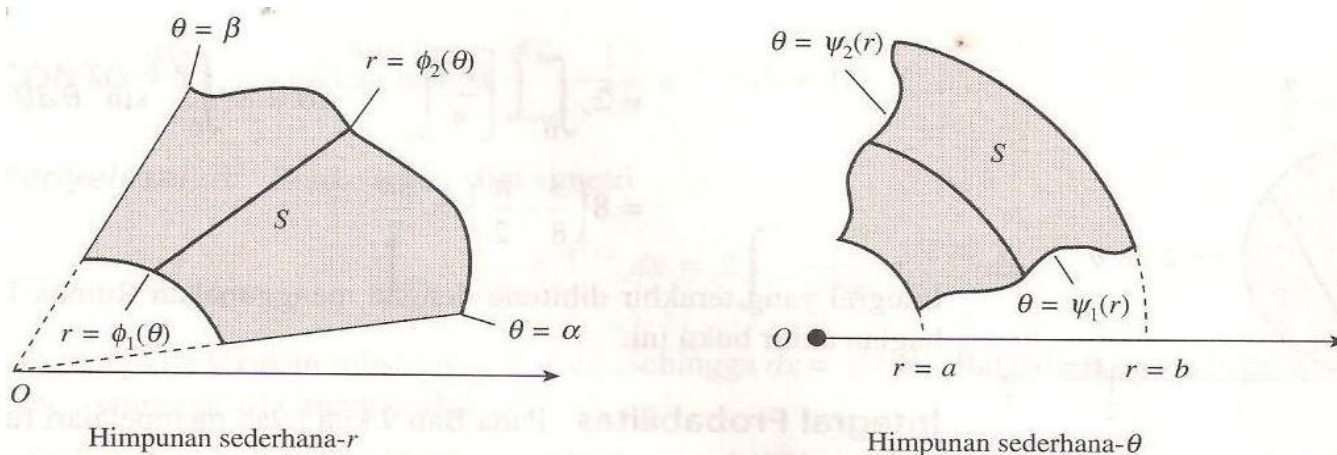
$$\begin{aligned} V &= \iint_R e^{x^2+y^2} dA = \int_0^{\pi/4} \int_1^3 e^{r^2} r dr d\theta \\ &= \int_0^{\pi/4} \int_1^3 \frac{1}{2} e^u du d\theta = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2} [e^u]_1^3 d\theta \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} (e^9 - e^1) d\theta = \frac{1}{2} [\theta(e^9 - e^1)]_0^{\pi/4}$$

$$= \frac{\pi}{8} (e^9 - e^1)$$

➤ Integral Kutub Himpunan Umum S

Untuk integral kutub kita kenal himpunan sederhana r dan himpunan sederhana θ .



Maka:

$$S = \{(r, \theta) : \phi_1(\theta) \leq r \leq \phi_2(\theta); \alpha \leq \theta \leq \beta\}$$

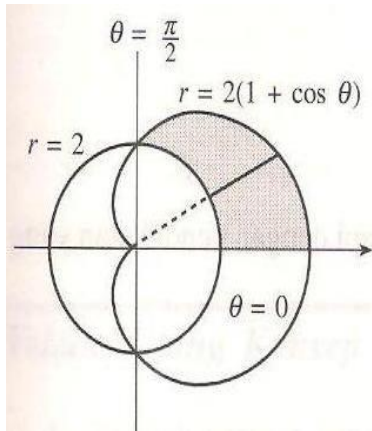
$$S = \{(r, \theta) : a \leq r \leq b; \psi_1(r) \leq \theta \leq \psi_2(r)\}$$

Contoh soal:

Hitunglah $\iint_R y dA$ dimana S adalah daerah di kuadran pertama yang berada di luar lingkaran $r = 2$ serta di dalam kardioid $r = 2(1 + \cos \theta)$

Peny:

Berdasarkan gambar di bawah ini maka:



S adalah himpunan sederhana r

$$y = r \sin \theta$$

$$\theta = 0 \rightarrow \pi / 2$$

$$r = 2 \rightarrow r = 2(1 + \cos \theta)$$

$$\begin{aligned} \iint_S y dA &= \int_0^{\pi/2} \int_2^{2(1+\cos\theta)} r \sin \theta r dr d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \left[\frac{r^3}{3} \sin \theta \right]_2^{2(1+\cos\theta)} d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \left[(2(1+\cos\theta))^3 \frac{\sin \theta}{3} - \frac{2^3}{3} \sin \theta \right] d\theta \end{aligned}$$

$$= \frac{8}{3} \left[\int_0^{\pi/2} (1 + \cos \theta)^3 \sin \theta d\theta - \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta \right]$$

$$= \frac{8}{3} \left[\int_0^{\pi/2} -u^3 du - \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta \right]$$

$$= \frac{8}{3} \left[-\frac{1}{4} (1 + \cos \theta)^4 + \cos \theta \right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{8}{3} \left(-\frac{1}{4} (1^4 - (2)^4) + (-1) \right) = \frac{22}{3}$$