

MATRIKS

Definisi Matriks

- **Matriks** adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan yang diatur berdasarkan baris (row) dan kolom (column).
- Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan **entri** dalam matriks atau disebut juga **elemen** atau **unsur**.
- Ukuran (ordo) matriks menyatakan banyaknya baris dan kolom pada matriks tersebut

Ordo Matriks

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = [2 \quad -3 \quad -1 \quad 6] \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & 6 \\ 3 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Ordo Matriks **A** : 3 X 2

Ordo Matriks **B** : 1 X 4

Ordo Matriks **C** :

Ordo Matriks **D** :

Notasi Matriks

- Matriks dinotasikan dengan huruf besar.
- Jika A adalah sebuah matriks, kita dapat juga menggunakan a_{ij} untuk menyatakan entri/unsur yang terdapat di dalam baris i dan kolom j dari A sehingga

$$A = [a_{ij}]$$

- **Contoh**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Jenis-Jenis Matriks

1. Matriks Nol
2. Matriks Satu
3. Matriks Baris
4. Matriks Kolom
5. Matriks Persegi
6. Matriks Segitiga Atas
7. Matriks Segitiga Bawah
8. Matriks Diagonal
9. Matriks Identitas
10. Matriks Tranpose

JENIS -JENIS MATRIKS

- ❑ **Matriks bujursangkar (persegi)** adalah matriks yang berukuran $n \times n$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

- ❑ **Matriks nol** adalah matriks yang setiap entri atau elemennya adalah bilangan nol

$$O_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sifat-sifat dari matriks nol :

- $A + 0 = A$, jika ukuran matriks $A =$ ukuran matriks 0
- $A * 0 = 0$, begitu juga $0 * A = 0$.

JENIS –JENIS MATRIKS

- **Matriks Diagonal** adalah matriks persegi yang semua elemen di atas dan dibawah diagonalnya adalah nol. Dinotasikan sebagai D.

Contoh :

$$D_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

- **Matriks Skalar** adalah matriks diagonal yang semua elemen pada diagonalnya sama

$$D_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

JENIS –JENIS MATRIKS

- ❑ **Matriks Identitas** adalah matriks skalar yang elemen-elemen pada diagonal utamanya bernilai 1.

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sifat-sifat matriks identitas :

$$A \cdot I = A$$

$$I \cdot A = A$$

- ❑ **Matriks Segitiga Atas** adalah matriks persegi yang elemen di bawah diagonal utamanya bernilai nol
- ❑ **Matriks Segitiga Bawah** adalah matriks persegi yang elemen di atas diagonal utamanya bernilai nol

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Operasi Pada Matriks

- **Penjumlahan (addition)**

Jika A dan B adalah sembarang dua matriks yang **ukurannya sama** maka jumlah $A + B$ adalah matriks yang diperoleh dengan menambahkan entri-entri yang bersesuaian dalam kedua matriks tersebut

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}; \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} & a_{33} + b_{33} \end{bmatrix}$$

Berlaku juga untuk Operasi Pengurangan pada Matriks

Soal dan Penyelesaian

Jika

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & -6 & 4 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 7 \\ 0 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

Maka:

$$A + B = \begin{bmatrix} 7 & -4 & 12 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix} \quad A - B = \begin{bmatrix} -1 & 8 & -2 \\ 1 & -14 & 2 \end{bmatrix}$$

Operasi Pada Matriks

- **Perkalian Skalar Pada Matriks**

Jika A adalah suatu matriks dan c suatu skalar, maka hasil kali cA adalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan masing-masing entri dari A oleh c .

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow c\mathbf{A} = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & ca_{13} \\ ca_{21} & ca_{22} & ca_{23} \\ ca_{31} & ca_{32} & ca_{33} \end{bmatrix}$$

Operasi Pada Matriks

- **Perkalian Matriks dengan Matriks**

Matriks $A_{m \times n}$ dapat dikalikan dengan matriks $B_{n \times q}$ jika dan hanya jika banyaknya kolom pada matriks A sama dengan banyaknya baris pada matriks B. ($n = p$)

$$A_{m \times n} B_{n \times q} = C_{m \times q}$$
$$A = [a_{ij}]_{m \times n} \text{ dan } B = [b_{ij}]_{n \times q}$$

maka

$$C = [c_{ij}]_{m \times q} \text{ dengan } c_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ij}$$

Soal dan Penyelesaian

Jika

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -4 & 12 \\ -1 & 2 & -6 \end{bmatrix}$$

Maka:

$$-2.A = -2. \begin{bmatrix} 7 & -4 & 12 \\ -1 & 2 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 & 8 & -24 \\ 2 & -4 & 12 \end{bmatrix}$$

Soal dan Penyelesaian

Tentukan AB jika: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$

Jawab:

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2(1) + 1(-1) + 4(4) & 2(2) + 1(3) + 4(-1) \\ -1(1) + 3(-1) + 2(4) & -1(2) + 3(3) + 2(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Apakah $AB = BA$???

Matriks Transpose

□ Jika A adalah suatu matriks $m \times n$, maka transpose A dinyatakan oleh A^t dan didefinisikan dengan matriks $n \times m$ yang kolom pertamanya adalah baris pertama dari A , kolom keduanya adalah baris kedua dari A , demikian juga dengan kolom ketiga adalah baris ketiga dari A dan seterusnya.

□ Contoh :
matriks A : $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ berordo 2×3

transposenya : $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ berordo 3×2

Matriks Transpose

Beberapa Sifat Matriks Transpose :

$$1. (A + B)^T = A^T + B^T$$

$$2. (A^T)^T = A$$

$$3. (AB)^T = B^T A^T$$

$$4. (kA)^T = kA^T$$

Matriks Transpose

Pembuktian aturan no1 :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \end{bmatrix}$$

TERBUKTI

$$B^T = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \\ b_{13} & b_{23} \end{bmatrix} \quad A^T + B^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \\ b_{13} & b_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{21} + b_{21} \\ a_{12} + b_{12} & a_{22} + b_{22} \\ a_{13} + b_{13} & a_{23} + b_{23} \end{bmatrix}$$

Matriks Transpose

Pembuktian aturan no 2 :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix}$$

TERBUKTI

$$(A^T)^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Buktikan aturan no. 3 dan no. 4 !

Matriks Simetri

Sebuah matriks dikatakan simetri apabila hasil dari transpose matriks A sama dengan matriks A itu sendiri.

$$A^T = A$$

Contoh :

1.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Latihan Soal

1. Jika $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -5 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -1 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & -5 \end{bmatrix}$

tentukanlah:

a. $2A + B$

b. $-3B + A$

c. $A - 2B^T$

Latihan Soal

2. Diberikan matriks :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Jika mungkin, hitunglah :

a. $(AB)^T$

c. $A^T B^T$

e. $(B^T + A)C$

b. $B^T A^T$

d. $B^T C + A$

Determinan Matriks

- Jika $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ maka:
- $\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{23} -$
 $a_{13}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$

atau

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Contoh

Tentukan determinan matriks

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Jawab :

$$\begin{aligned} \det(B) &= \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (3)(1)(1) + (2)(0)(-2) + (-1)(1)(-2) - (-1)(1)(-2) - (3)(0)(-2) - (2)(1)(1) \\ &= 3 + 0 + 2 - 2 - 0 - 2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Determinan Matriks dengan Ekspansi Kofaktor

Misalkan

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Beberapa definisi yang perlu diketahui :

- M_{ij} disebut **Minor- ij** yaitu determinan matriks A dengan menghilangkan baris ke_i dan kolom ke-j matriks A.

Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{maka } M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

- C_{ij} Matrik dinamakan **kofaktor - ij** yaitu $(-1)^{i+j} M_{ij}$

Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

maka

$$\begin{aligned} C_{12} &= (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^3 (2 - 0) \\ &= -2 \end{aligned}$$

Rumus Determinan Matriks dengan Ekspansi Kofaktor

- Menghitung $\det(A)$ dengan ekspansi kofaktor sepanjang baris ke- i

$$\det(A) = a_{i1} C_{i1} + a_{i2} C_{i2} + \dots + a_{in} C_{in} = \sum_{j=1}^n a_{ij} C_{ij}$$

- Menghitung $\det(A)$ dengan ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke- j

$$\det(A) = a_{1j} C_{1j} + a_{2j} C_{2j} + \dots + a_{nj} C_{nj} = \sum_{i=1}^n a_{ij} C_{ij}$$

Contoh

Hitunglah $\text{Det}(A)$ dengan ekspansi kofaktor :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Jawab :

Misalkan, kita akan menghitung $\det(A)$ dengan ekspansi kofaktor ***sepanjang baris ke-3***

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \det(A) = \sum_{j=1}^3 a_{3j} c_{3j} = a_{31} c_{31} + a_{32} c_{32} + a_{33} c_{33}$$

$$c_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1((1)(1) - (0)(2)) = 1 - 0 = 1$$

$$c_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1((2)(1) - (0)(1)) = -1(2 - 0) = -2$$

$$c_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1((2)(2) - (1)(1)) = 4 - 1 = 3$$

$$\det(A) = 0(1) + 1(-2) + 2(3) = 0 - 2 + 6 = 4$$

Invers Matriks

□ Matriks invers dari suatu matriks A adalah matriks B yang apabila dikalikan dengan matriks A memberikan satuan I

□ $AB = I$

□ Notasi matriks invers : A^{-1}

□ Sebuah matriks yang dikalikan matriks inversnya akan menghasilkan matrik satuan

$$A^{-1}A = I$$

□ Jika

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{Maka} \quad A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Invers Matriks

- Langkah-langkah untuk mencari invers matriks M yang berordo 3×3 adalah :
 - Cari determinan dari M
 - Transpose matriks M sehingga menjadi M^T
 - Cari adjoin matriks
 - Gunakan rumus

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} (\text{adjoin}(M))$$

Invers Matriks

□ Contoh Soal :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

- Cari Determinannya :

$$\det(M) = 1(0-24) - 2(0-20) + 3(0-5) = 1$$

- Transpose matriks M

$$M^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Invers Matriks

- Temukan matriks kofaktor dengan menghitung minor-minor matriksnya

$$M^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$
$$M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -24 \quad M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -18 \quad M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5$$
$$M_{21} = \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -20 \quad M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -15 \quad M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4$$
$$M_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = -5 \quad M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -4 \quad M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

- Hasilnya :

$$\begin{bmatrix} -24 & -18 & 5 \\ -20 & -15 & 4 \\ -5 & -4 & 1 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Invers Matriks

□ Hasil Adjoinnya :

$$\begin{pmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

□ Hasil akhir

$$M^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Latihan Soal

1. Tentukan determinan matriks dengan ekspansi kofaktor dan dengan cara hitung langsung lalu bandingkan hasilnya

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 7 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$
$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 8 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 6 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

Latihan Soal

2. Tentukan invers matriks dari masing-masing matriks di bawah ini

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 7 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 8 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 6 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$