PENERAPAN KALKULUS DIFERENSIAL: FUNGSI DENGAN SATU VARIABEL BEBAS

ELASTISITAS PERMINTAAN DAN PENAWARAN

Konsep koefisien elastisitas secara umum dapat didefinisikan sebagai perubahan persentase suatu variabel terikat sebagai akibat adanya perubahan persentase suatu variabel bebas. Jika konsep elastisitas ini diterapkan pada fungsi permintaan, berarti kita ingin mengukur perubahan persentase jumlah yang diminta konsumen sebagai akibat adanya perubahan persentase pada harga barang itu sendiri dan variabel bebas lain yang memengaruhinya secara parsial, dan hal ini disebut **elastisitas permintaan**. Juga hal serupa jika diterapkan pada fungsi penawaran, berarti kita ingin mengukur perubahan persentase jumlah yang ditawarkan produsen sebagai akibat perubahan persentase pada harga barang itu sendiri dan variabel bebas lain yang memengaruhinya secara parsial, dan hal ini disebut **elastisitas penawaran**.

ELASTISITAS HARGA DARI PERMINTAAN

Definisi elastisitas harga dari permintaan ini secara matematis adalah perubahan persentase jumlah yang diminta oleh konsumen dibagi dengan perubahan persentase dari hargabarang itu sendiri. Jika elastisitas harga dari permintaan dilambangkan dengan E_h maka rumusnya dapat ditulis menjadi

$$E_{hd,x} = \frac{\textbf{perubahan persentase jumlah yang diminta dari barang X}}{\textbf{perubahan persentase harga barang X}}$$

Rasio perubahan persentase yang dinyatakan di atas, bila diuraikan secara matematis, maka akan diperoleh rumus elastisitas harga dari permintaan seperti ini,

$$E_{hd} = \frac{\frac{Q-Q1}{Q}}{\frac{P-P1}{P}} = \frac{\frac{\Delta Q}{Q}}{\frac{\Delta P}{p}} = \frac{\Delta Q}{\Delta P} \cdot \frac{P}{Q}$$

Rumus ini adalah rumus elastisitas harga dari permintaan yang dihitung di antara dua titik (*range*) pada kurva permintaan, dan ini disebut dengan rumus elastisitas harga busur (*arc elasticity*)

Jika perubahan harga sangat kecil atau $\Delta P \to 0$, maka $\frac{\Delta Q}{\Delta P}$ akan menjadi,

$$\lim_{\Delta P \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta P} = \frac{dQ}{dP}$$

Sehingga rumus elastisitas harga dari permintaan dapat ditulis kembali menjadi,

$$E_{hd} = \frac{dQ}{dP} . \frac{P}{Q} \text{ atau } E_{hd} = \frac{dQ/dP}{Q/P}$$

Rumus ini adalah rumus elastisitas harga dari permintaan yang disebut dengan **elastisitas harga titik** (*point elasticity*). Di samping itu, rumus elastisitas ini untuk menentukan elastisitas harga di satu titik pada kurva permintaan. Lagi pula, rumus ini hanya berlaku pada fungsi permintaan yang berbentuk Q=f(P). Akan tetapi, jika fungsi permintaan berbentuk P=f(Q), maka rumus elastisitas harga titik dari permintaan berubah menjadi,

$$\mathbf{E_{hd}} = \frac{1}{dP/dQ} . \frac{P}{Q}$$

Lima jenis elastisitas harga dari permintaan, yaitu:

1. Jika | Ehd | < 1, tidak elastis (inelastis) terhadap harga
2. Jika | Ehd | = 1, uniter terhadap harga
3. Jika | Ehd | > 1, elastis terhadap harga
4. Jika | Ehd | = 0, tidak elastis sempurna terhadap harga
5. Jika | Ehd | =∞ , elastis sempurna terhadap harga

Contoh

jika fungsi permintaan suatu barang ditunjukkan oleh Q = 150 – 3P, berapakah elastisitas permintaanya jika tingkat harga P=40, P=25, P=10?

Penyelesaian

Jika P=40, maka Q= 150 – 3(40) = 30 dan $\frac{dQ}{dP}$ = -3

$|Eh| = \frac{dQ}{dP} \cdot \frac{P}{Q} = -3 \cdot \left(\frac{40}{30}\right) = |-4| = 4$ (elastis)

Jika P=25, maka Q= 150-3(25) = 75

$|Eh| = \frac{dQ}{dP} \cdot \frac{P}{Q} = -3 \cdot \left(\frac{25}{75}\right) = |-1| = 1$ (uniter)

Jika P=10, maka Q= 150-3(10) = 120

$|Eh| = \frac{dQ}{dP} \cdot \frac{P}{Q} = -3 \cdot \left(\frac{10}{120}\right) = |-\frac{1}{4}| = \frac{1}{4}$ (tidak elastis)

Contoh

Carilah elastisitas harga permintaan dari fungsi Q = $\frac{9}{\mathrm{P}^3}$

Penyelesaian

- Q = $\frac{9}{\mathrm{P}^3}$ = $9\mathrm{P}^{-3}$

$\frac{dQ}{dP}$ = $-27P^{-4}$

Eh = $\frac{dQ}{dP} \cdot \frac{P}{Q}$ = $(-27P^{-4})\left[\frac{P}{9\mathrm{P}^{-3}}\right]$ = $\frac{-27P^{-3}}{9\mathrm{P}^{-3}}$ = -3

ELASTISITAS HARGA DARI PENAWARAN

Elastisitas harga dari penawaran ini mengukur kepekaan produsen terhadap perubahan harga. Nilai koefisien dari elastisitas ini mempunyai kemiringan positif. Jadi, nilai koefisien dari elastisitas ini berkisar di antara nol sampai tak hingga ($0<E_{hs}<\infty$). Berdasarkan nilai koefisien ini maka elastistas harga dari penawaran dapat dikategorikan menjadi lima, yaitu:

1. Jika $E_{hs} = 0$, maka penawaran tidak elastis sempurna terhadap harga
2. Jika $E_{hs} < 1$, maka penawaran tidak sempurna terhadap harga
3. Jika $E_{hs} = 1$, maka penawaran uniter terhadap harga
4. Jika $E_{hs} > 1$, maka penawaran elastis terhadap harga
5. Jika $E_{hs} = \infty$, maka penawaran elastis sempurna terhadap harga

BIAYA TOTAL, RATA-RATA, DAN MARGINAL

Jika biaya total untuk memproduksi dan memasarkan sejumlah produk Q diasumsikan sebagai fungsi dari Q itu sendiri, maka fungsi biaya total dapat dinyatakan dengan,

$$TC = f(Q)$$

Dimana TC = Biaya total (*total cost*)

Q= Jumlah produk yang dihasilkan (*quantity*)

Selanjutnya biaya rata-rata (*average cost - AC*), atau biaya per unit produk adalah total biaya dibagi dengan jumlah produk yang dihasilkan, dan rumusnya dapat ditulis

$$AC = \frac{TC}{Q} = \frac{f(Q)}{Q}$$

Biaya marginal (*marginal cost-MC*) dapat didefinisikan sebagai tingkat perubahan dari biaya total, TC, terhadap perubahan satu unit produk yang dihasilkan, Q, yang dinyatakan oleh,

$$\mathbf{MC}= \frac{dTC}{dQ} = \mathbf{f'(Q)}$$

Istilah "biaya marginal" digunakan dalam ilmu ekonomi karena biaya ini menunjukkan perubahan dalam biaya total sebagai akibat adanya perubahan satu unit produk yang dihasilkan, yaitu $\frac{\Delta TC}{\Delta Q}$. Kata "marginal" digunakan secara luas dalam ilmu ekonomi sebagai pengganti dari istilah matematika "**derivatif dari**". Jadi, **biaya marginal adalah derivatif pertama dari biaya total**.

Berbagai macam fungsi dapat digunakan untuk menyatakan fungsi biayaaaaaaaa. Tetapi fungsi-fungsi biaya ini harus mengikuti asumsi-asumsi dalam teori ekonomi sebagai berikut:

1. Jika tidak ada produk yang dihasilkan, biaya total adalah nol atau positif, yaitu $f(0) \geq 0$. f(0) ini merupakan biaya tetap atau sering disebut biaya overhead produksi.
2. Biaya total harus meningkat bilamana Q bertambah, sehingga biaya marginal f'(Q) selalu positif
3. Biaya total untuk memproduksi sejumlah produk tertentu dalam jumlah yang sangat besar biasanya mencapai titik di mana titik ini meningkta dengan laju yang makin tinggi. Dengan demikian, kurva biaya total akan lengkung ke atas, yaitu f"(Q)>0. akan tetapi dalam suatu kisaran (*range*) tertentu (terbatas) kurva biaya total sering kali lengkung ke bawah, sesuai dengan biaya marginal yang menurun.

FUNGSI BIAYA TOTAL LINIER

Jika fungsi biaya total linier adalah, TC = aQ+b, di mana a > 0, b ≥ 0, maka

- Biaya rata-rata, AC = $\frac{TC}{Q}$ = a + $\frac{b}{Q}$
- Biaya Marginal, MC = $\frac{dTC}{dQ}$ = a
- Biaya rata-rata Marginal, MAC = $\frac{dAC}{dQ}$ = - $\frac{b}{Q^2}$

Biaya total dan biaya marginal dinyatakan oleh garis lurus, sedangkan biaya rata-rata dinyatakan oleh kurva hiperbola sama sisi dengan sumbu asimtot horizontal AC= a pada kuadran pertama. Fungsi ini tidak mempunyai nilai minimum kecuali hanya mendekati a, sedangkan biaya marginal merupakan fungsi menaik dari jumlah unit produk yang dihasilkan

FUNGSI BIAYA TOTAL KUADRAT

Jika fungsi biaya total kuadrat adalah, TC = aQ^2+bQ+c, di mana a > 0, b≥0, c≥0, maka

- Biaya rata-rata, AC = $\frac{TC}{Q}$ = aQ + b + $\frac{c}{Q}$
- Biaya Marginal, MC = $\frac{dTC}{dQ}$ = 2aQ + b, dan
- Biaya rata-rata marginal, MAC = $\frac{dAC}{dQ}$ = a - $\frac{c}{Q^2}$

LANJUTAN

Untuk biaya rata-rata minimum, $\frac{dAC}{dQ}$ harus sama dengan nol. Jadi,

a - $\frac{c}{Q^2}$ = 0

$\frac{c}{Q^2}$ = 0

- $Q^2 = \frac{c}{a}$

Q = ± $\sqrt{c/a}$, tapi hanya diambil Q = $\sqrt{c/a}$

$\frac{d^2AC}{dQ^2} = \frac{2c}{Q^3}$ > 0 untuk semua nilai Q > 0, sehingga biaya rata-rata minimum pada Q = $\sqrt{c/a}$

Perhatikan bahwa biaya rata-rata sama dengan biaya marginal jika Q = $\sqrt{c/a}$, karena

AC = a $\sqrt{c/a}$ b + c $\sqrt{a/c}$

- AC = 2 $\sqrt{ac}$ + b, dan

MC = 2a $\sqrt{c/a}$ + b

MC = 2 $\sqrt{ac}$ + b

FUNGSI BIAYA TOTAL KUBIK

Jika fungsi biaya total kubik adalah, TC = $aQ^3 + bQ^2 + cQ + d$, di mana $a > 0$, $b \leq 0$, $c \geq 0$, $d \geq 0$, dan $b^2 \leq 3ac$, maka

- Biaya rata-rata, AC = $\frac{TC}{Q}$ = $aQ^2+bQ+c+\frac{d}{Q}$
- Biaya Marginal, MC = $\frac{dTC}{dQ}$ = $3aQ^2+2bQ+c$, dan
- Biaya rata-rata marginal, MAC = $\frac{dAC}{dQ}$ = $2aQ+b - \frac{d}{Q^2}$

Fungsi-fungsi biaya kubik ini sering kali cocok apabila kelengkungan fungsi ini berubah dalam suatu interval tertentu. Akan tetapi, fungsi ini haruslah tidak mempunyai maksimum atau minimum relatif pada kuadran pertama. Oleh karena tidak ada maksimum atau minimum relatif pada Q = $-\frac{b}{3a}$, tetapi hanya ada sebuah titik belok pada Q = $-\frac{b}{3a}$. Jadi, jika $b^2-3ac < 0$, maka TC = $aQ^3 + bQ^2 + cQ + d$ tidak mempunyai maksimum atau minimum relatif pada kuadran pertama. Titik belok terjadi pada Q = $-\frac{b}{3a}$, dan TC = $\frac{b(2b^2-9ac)}{27\,a^2}$ + d

FUNGSI BIAYA TOTAL POLINOMIAL TINGKAT LEBIH TINGGI

Jika fungsi biaya total polinomial tingkat lebih tinggi adalah, TC = $aQ^n + c$, di mana $a > 0$, $n > 1$, $c \geq 0$, maka

- ❑ Biaya rata-rata, AC = $\frac{TC}{Q} = aQ^{n-1} + \frac{C}{Q}$,
- ❑ Biaya Marginal, MC = $\frac{dTC}{dQ} = aQ^{n-1}$, dan
-
- ❑ Biaya rata-rata marginal = MAC = $\frac{dAC}{dQ} = a(n-1)Q^{n-2} - \frac{C}{Q^2}$

Jenis kurva polinomial sederhana ini selalu lengkung ke atas untuk $Q \geq 0$. oleh karena itu, biasanya dalam praktik hanya sesuai untuk suatu rentang Q tertentu dan minimum pada Q = $[\frac{c}{a(n-1)}]^{1/n}$

FUNGSI BIAYA TOTAL EKSPONEN

Jika fungsi biaya total eksponen adalah, TC = ae^{bQ}, di mana a > 0, b > 0, maka

- ❑ Biaya rata-rata, AC = $\frac{TC}{Q} = \frac{ae^{bQ}}{Q}$
- ❑ Biaya marginal, MC = $\frac{dTC}{dQ} = abe^{bQ}$, dan
-
- ❑ Biaya rata-rata marginal, MAC = $\frac{dAC}{dQ} = \frac{ae^{bQ} - ae^{bQ}}{Q^2} = \frac{ae^{bQ}(bQ - 1)}{Q^2}$

Kurva eksponensial dan logaritma dapat lengkung ke atas ataupun lengkung ke bawah untuk semua Q ≥ 0. Dan kurva minimum pada Q = $\frac{1}{b}$. Perhatikan bahwa biaya rata-rata dan biaya marginal sama jika Q = $\frac{1}{b}$.

HUBUNGAN ANTARA FUNGSI BIAYA RATA-RATA DENGAN BIAYA MARGINAL

Dalam teori ekonomi hubungan antara fungsi biaya rata-rata dengan fungsi biaya marginal, terdapat tiga prinsip yang harus diperhatikan, yaitu:

- Kemiringan kurva biaya rata-rata akan negatif, jika dan hanya jika, kurva biaya marginal (MC) terletak di bawah kurva biaya rata-rata (AC)
- Kemiringan kurva biaya rata-rata akan menjadi nol (minimum), jika dan hanya jika, kurva biaya marginal (MC) memotong kurva biaya rata-rata (AC)
- Kemiringan kurva biaya rata-rata akan positif, jika dan hanya jika, kurva biaya marginal (MC) terletak di atas kurva biaya rata-rata (AC)

Prinsip kedua dapat dibuktikan dengan menggunakan aturan hasil-bagi diferensial. Misalkan TC = f(Q), maka biaya rata-rata AC = $\frac{TC}{Q}$ = $\frac{f(Q)}{Q}$, dan biaya marginalnya MC = $\frac{dTC}{dQ}$ = f'(Q). Nilai minimum dari fungsi biaya rata-rata diperoleh dengan cara:

$\frac{dAC}{dQ} = \frac{f'(Q).Q - f(Q)}{Q^2}$ jika $\frac{dAC}{dQ} = 0$, maka $\frac{f'(Q).Q - f(Q)}{Q^2} = 0$

Sehingga f(Q) = f'(Q).Q

$\frac{f(Q)}{Q}$ = f'(Q) atau AC = MC (terbukti)

CONTOH

Jike diketahui fungsi biaya total dari suatu perusahaan adalah TC = $0{,}2Q^2 + 500Q + 8000$, (a) carilah fungsi biaya rata-rata (AC); (b) berapakah jumlah produk yang dihasilkan agar biaya rata-rata minimum?; dan (c) berapa nilai biaya rata-rata minimum tersebut?

PENYELESAIAN

a. Diketahui TC = $0{,}2Q^2 + 500Q + 8000$

fungsi biaya rata-rata diperoleh dengan rumus:

- $$AC = \frac{TC}{Q} = \frac{0{,}2Q^2 + 500Q + 8000}{Q} = 0{,}2Q + 500 + \frac{8000}{Q}$$

b. Untuk memperoleh Ac minimum, maka langkah pertama mengambil derivatif pertama pada persamaan, kemudian disamakan dengan nol

$$\frac{dAC}{dQ} = 0{,}2 - 8.000Q^{-2} = 0$$

$$0{,}2 = \frac{8000}{Q^2}$$

$$Q^2 = \frac{8000}{0{,}2} = 40.000$$

$$Q = \sqrt{40000} = 200$$

Untuk menguji AC minimum diujikan dengan derivatif kedua dari AC

$\frac{d^2AC}{dQ^2}$ = -16.000Q^{-3} = $\frac{16.000}{Q^3}$

Jika Q = 200, maka $\frac{d^2AC}{dQ^2}$ = $\frac{16.000}{(200)^3}$ > 0 (minimum)

c. Selanjutnya, untuk mendapat AC_{min} substitusikan nilai Q = 200 ke dalam persamaan AC, yaitu

$$AC_{min} = \frac{0{,}2(200)^2 + 500Q(200) + 8000}{200} = \frac{116.000}{200} = 580$$

jadi, biaya rata-rata minimum sebesar Rp. 580 dapat diperoleh, jika perusahaan menghasilkan produk sebanyak 200 unit.

CONTOH

Jika suatu perusahaan manufaktur ingin menghasilkan suatu produk, di mana fungsi biaya total telah diketahui adalah $TC = 0{,}1Q^3 - 18Q^2 + 1700Q + 34.000$, (a) carilah fungsi biaya marginal (MC); (b) berapakah jumlah produk yang dihasilkan agar biaya marginal minimum?; (c) berpaa nilai biaya marginal minimum tersebut?

PENYELESAIAN

a. Diketahui $TC = 0{,}1Q^3 - 18Q^2 + 1700Q + 34.000$

- fungsi biaya marginal diperoleh dari derivatif pertama fungsi biaya total:

  $MC = \frac{dTC}{dQ} = 0{,}3Q^2 - 36Q + 1700$

b. Untuk memperoleh MC minimum, maka langkah pertama mengambil derivatif pertama pada persamaan, kemudian disamakan dengan nol, hasilnya adalah

$$\frac{dMC}{dQ} = 0{,}6Q - 36 = 0$$

$$0{,}6\ Q = 36$$

$$Q = 60$$

Untuk menguji biaya marginal minimum diujikan dengan derivatif kedua dari MC,

$$\frac{d^2MC}{dQ^2} = 0{,}6 > 0 \text{ (minimum)}$$

c. Selanjutnya, untuk mendapat $MC_{\ min}$ substitusikan nilai Q = 60 ke dalam persamaan MC, yaitu

$$MC_{\ min} = 0{,}3(60)^2 - 36(60) + 1700$$

$$= 1080 + 2160 + 1700$$

$$= 620$$

Jadi, biaya marginal minimum sebesar Rp 620 dapat diperoleh jika perusahaan menghasilkan produk sebanyak 60 unit

CONTOH

Jika diketahui fungsi biaya total dari suatu perusahaan pabrikasi adalah TC = $Q^3 - 30Q^2 + 325Q + 65000$, (a) carilah biaya tetap total (*total fixed cost* - TFC) dan biaya variabel total (TVC); (b) carilah jumlah produk yang dihasilkan agar biaya variabel total minimum?; (c) berapa nilai biaya variabel rata-rata minimum (*average variable cost - AVC*) tersebut?

PENYELESAIAN

a. Diketahui TC = $Q^3 - 30Q^2 + 325Q + 65000$

   Biaya tetap total (TFC) adalah suku konstanta 65000 pada persamaan biaya total yaitu : TFC = 65.000, sednagkan suku-suku yang tersisa yang mengandung variabel Q adalah biaya variabel total, yaitu:

   TVC = $Q^3 - 30Q^2 + 325Q$

b. Biaya variabel rata-rata (AVC) diperoleh dengan cara membagi TVC dengan jumlah per unit Q

$$AVC = \frac{TVC}{Q} = \frac{Q^3 - 30Q^2 + 325Q}{Q} = Q^2 - 30Q + 325$$

Untuk memperoleh AVC minimum, pertama-tama kita mengambil derivatif pertama pada persamaan, kemudian disamakan dengan nol, hasilnya adalah

$$\frac{dAVC}{dQ} = 2Q - 30 = 0$$

$$2Q = 30$$

$$Q = 15$$

Untuk menguji biaya variabel rata-rata minimum, maka diujikan dengan derivatif kedua dari AVC, yaitu

$$\frac{d^2AVC}{d^2Q} = 2 > 0 \text{ (minimum)}$$

c. Selanjutnya , untuk mendapatkan AVC_{min} substitusikan nilai Q = 15 ke dalam persamaan , yaitu

$$AVC_{min} = (15)^2 - 30(15) + 325$$

$$= 225 - 450 + 325$$

$$= 100$$

Jadi, biaya variabel rata-rata minimum sebesar Rp 100 dapat diperoleh, jika perusahaan menghasilkan produk sejumlah 15 unit