

3-2

- **ANALISIS KORELASI DAN**
  - **REGRESI**

# ANALISIS KORELASI DAN REGRESI

## PENGANTAR

- Gagasan perhitungan ditetapkan oleh Sir Francis Galton (1822-1911).
- Persamaan regresi :Persamaan matematik yang memungkinkan peramalan nilai suatu peubah takbebas (*dependent variable*) dari nilai peubah bebas (*independent variable*).
- Regresi dan korelasi digunakan untuk mempelajari pola dan mengukur hubungan statistik antara dua atau lebih variabel.
- Jika digunakan hanya dua variabel disebut regresi dan korelasi sederhana.
- Jika digunakan lebih dari dua variabel disebut regresi dan korelasi berganda.

# PENGERTIAN **KORELASI**

Analisis Korelasi adalah Analisis statistika yang memanfaatkan hubungan antara dua atau lebih variable sehingga dapat diukur keeratannya.



# PENGERTIAN KORELASI

- Variabel yang akan diduga disebut variabel terikat (tidak bebas) atau **dependent variable**, biasa dinyatakan dengan **variabel Y**.
- Variabel yang menerangkan perubahan variabel terikat disebut variabel bebas atau **independent variable**, biasa dinyatakan dengan **variabel X**.
- Analisa korelasi digunakan untuk mengukur keeratan hubungan antara variabel-variabel tersebut.

## JENIS-JENIS PERSAMAAN REGRESI

- Regresi Linier :
  - Regresi Linier Sederhana
  - Regresi Linier Berganda
- Regresi Nonlinier
  - Regresi Eksponensial

## JENIS-JENIS PERSAMAAN REGRESI

- Regresi Linier :
- Bentuk Umum **Regresi Linier Sederhana**

$$Y = a + bX$$

- Y : peubah takbebas
- X : peubah bebas
- a : konstanta
- b : kemiringan

## JENIS-JENIS PERSAMAAN REGRESI

- Regresi Linier :
- Bentuk Umum **Regresi Linier Sederhana**

$$Y = a + bX$$

Y : peubah takbebas

X : peubah bebas

a : konstanta

b : kemiringan

- Bentuk Umum **Regresi Linier Berganda**

$$Y = a + b_1X_1 + b_2X_2 + \dots + b_nX_n$$

Y : peubah takbebas

a : konstanta

$X_1$  : peubah bebas ke-1

$b_1$  : kemiringan ke-1

$X_2$  : peubah bebas ke-2

$b_2$  : kemiringan ke-2

$X_n$  : peubah bebas ke-n

$b_n$  : kemiringan ke-n

## REGRESI LINIER SEDERHANA

- Metode Kuadrat terkecil (*least square method*): metode paling populer untuk menetapkan persamaan regresi linier sederhana
- Bentuk Umum **Regresi Linier Sederhana**

$$Y = a + bX$$

Y : peubah takbebas

X : peubah bebas

a : konstanta

b : kemiringan

## REGRESI LINIER SEDERHANA

- Penetapan Persamaan Regresi Linier Sederhana

$$b = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right) \left( \sum_{i=1}^n y_i \right)}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2}$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x}$$

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} - b \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

n : banyak pasangan data  
 $y_i$  : nilai peubah takbebas Y ke-i  
 $x_i$  : nilai peubah bebas X ke-i

# REGRESI LINIER SEDERHANA (CONTOH)

Tahun	Biaya Promosi (Juta Rupiah) (x)	Volume Penjualan (Ratusan Juta Liter) (y)	xy	x <sup>2</sup>	y <sup>2</sup>
1992	2	5	10	4	25
1993	4	6	24	16	36
1994	5	8	40	25	64
1995	7	10	70	49	100
1996	8	11	88	64	121
<b>Σ</b>	<b>Σx = 26</b>	<b>Σy = 40</b>	<b>Σxy = 232</b>	<b>Σx<sup>2</sup> = 158</b>	<b>Σy<sup>2</sup> = 346</b>

$$n = 5$$

$$b = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right) \left( \sum_{i=1}^n y_i \right)}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2} = \frac{(5 \times 232) - (26 \times 40)}{(5 \times 158) - (26^2)} = \frac{1160 - 1040}{790 - 676} = \frac{120}{114} = 1.0526 = 1.053$$

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} - b \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

$$a = \frac{40}{5} - \left( 1.05263... \times \frac{26}{5} \right) = 8 - (1.05263... \times 5.2) = 8 - 5.4736... = 2.5263... = 2.530$$

$$Y = a + bX \rightarrow Y = 2.530 + 1.053X$$

## REGRESI LINIER SEDERHANA (CONTOH)



Diketahui hubungan Biaya Promosi (X dalam Juta Rupiah) dan Y (Volume penjualan dalam Ratusan Juta liter) dapat dinyatakan dalam persamaan regresi linier pada contoh sebelumnya yaitu:

$$Y = 2,530 + 1,053 X$$

Perkirakan Volume penjualan jika dikeluarkan biaya promosi Rp. 10 juta?

Jawab:

$$Y = 2,530 + 1,053 X$$

Jika  $X = 10$ , maka

$$Y = 2,530 + 1,053 (10) = 2,530 + 10,53$$

$$Y = 13,06 \text{ (ratusan juta liter)}$$

## ANALISIS KORELASI LINIER SEDERHANA

- **ANALISA KORELASI** digunakan untuk mengukur kekuatan keeratan hubungan antara dua variabel melalui sebuah bilangan yang disebut **koefisien korelasi**.
- **Koefisien korelasi linier ( r )** adalah ukuran hubungan linier antara dua variabel/peubah acak X dan Y, dengan nilai antara 0 – 1.
- Bila dua peubah tidak berhubungan; korelasinya 0
- Bila sempurna korelasinya 1 (korelasinya linier)
- **KOEFISIEN DETERMINASI Sampel =  $R = r^2$**   
Ukuran proporsi keragaman total nilai peubah Y yang dapat dijelaskan oleh nilai peubah X melalui hubungan linier.

## MODEL PERSAMAAN KORELASI LINIER SEDERHANA

$$r = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right) \left( \sum_{i=1}^n y_i \right)}{\sqrt{\left[ n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right] \left[ n \sum_{i=1}^n y_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n y_i \right)^2 \right]}}$$

$$R = r^2$$

# MODEL PERSAMAAN KORELASI LINIER SEDERHANA (CONTOH)

Tahun	Biaya Promosi (Juta Rupiah) (x)	Volume Penjualan (Ratusan Juta Liter) (y)	xy	x <sup>2</sup>	y <sup>2</sup>
1992	2	5	10	4	25
1993	4	6	24	16	36
1994	5	8	40	25	64
1995	7	10	70	49	100
1996	8	11	88	64	121
<b>Σ</b>	<b>Σx = 26</b>	<b>Σy = 40</b>	<b>Σxy = 232</b>	<b>Σx<sup>2</sup> = 158</b>	<b>Σy<sup>2</sup> = 346</b>

Dari contoh sebelumnya, setelah mendapatkan persamaan Regresi  $Y = 2,530 + 1,053 X$ , hitung koef. korelasi (r) dan koef determinasi (R).

$$r = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right) \left( \sum_{i=1}^n y_i \right)}{\sqrt{\left[ n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right] \left[ n \sum_{i=1}^n y_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n y_i \right)^2 \right]}}$$

$$R = r^2$$

## MODEL PERSAMAAN KORELASI LINIER SEDERHANA (CONTOH)



$$\begin{aligned} r &= \frac{(5 \times 232) - (26 \times 40)}{\sqrt{[(5 \times 158) - (26^2)] \times [(5 \times 346) - (40^2)]}} = \frac{1160 - 1040}{\sqrt{[790 - 676] \times [1730 - 1600]}} \\ &= \frac{120}{\sqrt{114 \times 130}} = \frac{120}{\sqrt{14820}} = \frac{120}{121.73...} = 0.9857... \end{aligned}$$

Nilai  $r = 0.9857$  menunjukkan bahwa peubah X (biaya promosi) dan Y (volume penjualan) berkorelasi **linier yang positif dan tinggi**

$$R = r^2 = 0.9857^2 = 0.97165 = 97\%$$

Nilai  $R = 97\%$  menunjukkan bahwa 97% proporsi keragaman nilai peubah Y (volume penjualan) dapat dijelaskan oleh nilai peubah X (biaya promosi) melalui hubungan linier. Sisanya, yaitu 3% dijelaskan oleh hal-hal lain.

## REGRESI LINIER BERGANDA

- Pembahasan akan meliputi regresi linier dengan 2 atau lebih Variabel Bebas ( $X_1$ ,  $X_2$ , dan  $X_n$ ) dan 1 Variabel Tak Bebas ( $Y$ )

- Bentuk Umum **Regresi Linier Berganda**

$$Y = a + b_1X_1 + b_2X_2 + \dots + b_nX_n$$

$Y$  : peubah takbebas

$a$  : konstanta

$X_1$  : peubah bebas ke-1

$b_1$  : kemiringan ke-1

$X_2$  : peubah bebas ke-2

$b_2$  : kemiringan ke-2

$X_n$  : peubah bebas ke-n

$b_n$  : kemiringan ke-n

- Untuk regresi linier berganda dengan 2 Variabel Bebas ( $X_1$  dan  $X_2$ ) dan 1 Variabel Tak Bebas ( $Y$ ).

$$Y = a + b_1X_1 + b_2X_2$$

# REGRESI LINIER BERGANDA



$$Y = a + b_1 X_1 + b_2 X_2$$

$a$ ,  $b_1$  dan  $b_2$  didapatkan dengan menyelesaikan tiga persamaan Normal berikut:

$$(i) \quad n a + b_1 \sum_{i=1}^n x_{1i} + b_2 \sum_{i=1}^n x_{2i} = \sum_{i=1}^n y_i$$

$$(ii) \quad a \sum_{i=1}^n x_{1i} + b_1 \sum_{i=1}^n x_{1i}^2 + b_2 \sum_{i=1}^n x_{2i} x_{1i} = \sum_{i=1}^n x_{1i} y_i$$

$$(iii) \quad a \sum_{i=1}^n x_{2i} + b_1 \sum_{i=1}^n x_{2i} x_{1i} + b_2 \sum_{i=1}^n x_{2i}^2 = \sum_{i=1}^n x_{2i} y_i$$

$n$  : banyak pasangan data

$x_{1i}$  : nilai peubah bebas  $X_1$  ke- $i$

$y_i$  : nilai peubah takbebas  $Y$  ke- $i$

$x_{2i}$  : nilai peubah bebas  $X_2$  ke- $i$

# REGRESI LINIER BERGANDA

Berikut adalah data Volume Penjualan (juta unit) Mobil dihubungkan dengan variabel biaya promosi ( $X_1$  dalam juta rupiah/tahun) dan variabel biaya penambahan asesoris ( $X_2$  dalam ratusan ribu rupiah/unit).

$X_1$	$X_2$	$y$	$X_1 X_2$	$X_1 y$	$X_2 y$	$X_1^2$	$X_2^2$	$y^2$
2	3	4	6	8	12	4	9	16
3	4	5	12	15	20	9	16	25
5	6	8	30	40	48	25	36	64
6	8	10	48	60	80	36	64	100
7	9	11	63	77	99	49	81	121
8	10	12	80	96	120	64	100	144

$$\sum x = 31 \quad \sum x = 40 \quad \sum y = 50 \quad \sum x_1 x_2 = 239 \quad \sum x_1 y = 296 \quad \sum x_2 y = 379 \quad \sum x_1^2 = 187 \quad \sum x_2^2 = 306 \quad \sum y^2 = 470$$

Tetapkan Persamaan Regresi Linier Berganda  $Y = a + b_1 X_1 + b_2 X_2$

## REGRESI LINIER BERGANDA

Masukkan notasi-notasi ini dalam ketiga persamaan normal,

$$(i) \quad n a + b_1 \sum_{i=1}^n x_{1i} + b_2 \sum_{i=1}^n x_{2i} = \sum_{i=1}^n y_i$$

$$(ii) \quad a \sum_{i=1}^n x_{1i} + b_1 \sum_{i=1}^n x_{1i}^2 + b_2 \sum_{i=1}^n x_{2i} x_{1i} = \sum_{i=1}^n x_{1i} y_i$$

$$(iii) \quad a \sum_{i=1}^n x_{2i} + b_1 \sum_{i=1}^n x_{2i} x_{1i} + b_2 \sum_{i=1}^n x_{2i}^2 = \sum_{i=1}^n x_{2i} y_i$$

Sehingga didapatkan tiga persamaan berikut:

$$\begin{array}{rclclcl} (i) & 6a & + & 31 b_1 & + & 40 b_2 & = & 50 \\ (ii) & 31 a & + & 187 b_1 & + & 239 b_2 & = & 296 \\ (iii) & 40 a & + & 239 b_1 & + & 306 b_2 & = & 379 \end{array}$$

Selesaikan persamaan diatas dengan cara substitusi atau eliminasi :  
Sehingga didapat nilai a, b1 dan b2

$$a = 0,95 \qquad b_1 = 0,5 \qquad b_2 = 0,75,$$

Sehingga Persamaan Regresi Berganda

$$Y = a + b_1 X_1 + b_2 X_2$$

$$Y = 0.75 + 0.50 X_1 + 0.75 X_2$$

# KORELASI LINIER BERGANDA



Koefisien Determinasi Sampel untuk Regresi Linier Berganda diberi notasi sebagai berikut:

$$R_{y.12}^2$$

Sedangkan Koefisien Korelasi adalah akar positif Koefisien Determinasi atau

$$r_{y.12} = \sqrt{R_{y.12}^2}$$

Model

$$R_{y.12}^2 = 1 - \frac{JKG}{(n-1)s_y^2}$$

JKG : Jumlah Kuadrat Galat

$s_y^2$  : Jumlah Kuadrat y (terkoreksi)

di mana

$$s_y^2 = \frac{n \sum y^2 - (\sum y)^2}{n(n-1)}$$

$$JKG = \sum y^2 - a \sum y - b_1 \sum x_1 y - b_2 \sum x_2 y$$



# KORELASI LINIER BERGANDA

Berikut adalah data Volume Penjualan (juta unit) Mobil dihubungkan dengan variabel biaya promosi ( $X_1$  dalam juta rupiah/tahun) dan variabel biaya penambahan asesoris ( $X_2$  dalam ratusan ribu rupiah/unit). Tentukan nilai  $R_{y.12}^2$  dan jelaskan artinya.

$X_1$	$X_2$	$y$	$X_1 X_2$	$X_1 y$	$X_2 y$	$X_1^2$	$X_2^2$	$y^2$
2	3	4	6	8	12	4	9	16
3	4	5	12	15	20	9	16	25
5	6	8	30	40	48	25	36	64
6	8	10	48	60	80	36	64	100
7	9	11	63	77	99	49	81	121
8	10	12	80	96	120	64	100	144

$$\sum x = 31 \quad \sum x = 40 \quad \sum y = 50 \quad \sum x_1 x_2 = 239 \quad \sum x_1 y = 296 \quad \sum x_2 y = 379 \quad \sum x_1^2 = 187 \quad \sum x_2^2 = 306 \quad \sum y^2 = 470$$

$$s_y^2 = \frac{n \sum y^2 - (\sum y)^2}{n(n-1)} = \frac{6(470) - (50)^2}{6(6-5)} = \frac{2820 - 2500}{30} = \frac{320}{30} = 10.667$$

## KORELASI LINIER BERGANDA



$$\begin{aligned}JKG &= \sum y^2 - a \sum y - b_1 \sum x_1 y - b_2 \sum x_2 y \\ &= 470 - 0.75(50) - 0.5(296) - 0.75(379) \\ &= 470 - 37.5 - 148 - 284.25 \\ &= 0.25\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R_{y.12}^2 &= 1 - \frac{JKG}{(n-1)s_y^2} = 1 - \frac{0.25}{5 \times 10.667} = 1 - \frac{0.25}{53.333} \\ &= 1 - 0.0046875 \\ &= 0.9953125 \\ &= 99.53\%\end{aligned}$$

Nilai  $R_{y.12}^2 = 99.53\%$  menunjukkan bahwa 99.53% proporsi keragaman nilai peubah Y (volume penjualan) dapat dijelaskan oleh nilai peubah X (biaya promosi) dan  $XR_{y.122}^2$  (biaya aksesoris) melalui hubungan linier, sisanya sebesar 0.47% dijelaskan oleh hal-hal lain.

## REGRESI LINIER BERGANDA (CONTOH 2)

Tetapkan Persamaan Regresi Linier Berganda  $Y = a + b_1 X_1 + b_2 X_2$

### Data Kasus

No. Responden	Promosi (X1)	Harga (X2)	Keputusan Konsumen (Y)
1	10	7	23
2	2	3	7
3	4	2	15
4	6	4	17
5	8	6	23
6	7	5	22
7	4	3	10
8	6	3	14
9	7	4	20
10	6	3	19
Jumlah	60	40	170

## REGRESI LINIER BERGANDA (CONTOH 2)



**Tabel Pembantu**

No. Resp.	$X_1$	$X_2$	Y	$X_1Y$	$X_2Y$	$X_1X_2$	$X_1^2$	$X_2^2$
1	10	7	23	230	161	70	100	49
2	2	3	7	14	21	6	4	9
3	4	2	15	60	30	8	16	4
4	6	4	17	102	68	24	36	16
5	8	6	23	184	138	48	64	36
6	7	5	22	154	110	35	49	25
7	4	3	10	40	30	12	16	9
8	6	3	14	84	42	18	36	9
9	7	4	20	140	80	28	49	16
10	6	3	19	114	57	18	36	9
Jumlah	60	40	170	1122	737	267	406	182

## REGRESI LINIER BERGANDA (CONTOH 2)



$$n a + b_1 \sum_{i=1}^n x_{1i} + b_2 \sum_{i=1}^n x_{2i} = \sum_{i=1}^n y_i \quad (\text{i})$$

$$a \sum_{i=1}^n x_{1i} + b_1 \sum_{i=1}^n x_{1i}^2 + b_2 \sum_{i=1}^n x_{2i} x_{1i} = \sum_{i=1}^n x_{1i} y_i \quad (\text{ii})$$

$$a \sum_{i=1}^n x_{2i} + b_1 \sum_{i=1}^n x_{2i} x_{1i} + b_2 \sum_{i=1}^n x_{2i}^2 = \sum_{i=1}^n x_{2i} y_i \quad (\text{iii})$$

$$10 a + 60 b_1 + 40 b_2 = 170 \quad (1)$$

$$60 a + 406 b_1 + 267 b_2 = 1122 \quad (2)$$

$$40 a + 267 b_1 + 182 b_2 = 737 \quad (3)$$

## REGRESI LINIER BERGANDA (CONTOH 2)



Persamaan (1) dikalikan 6, persamaan (2) dikalikan 1:

$$\begin{array}{rcl} 60 a + 360 b_1 & + 240 b_2 & = 1020 \\ 60 a + 406 b_1 & + 267 b_2 & = 35163 \\ \hline 0 a + -46 b_1 + -27 b_2 & & = -102 \\ -46 b_1 - 27 b_2 & & = -102 \quad \dots\dots\dots (4) \end{array}$$

Persamaan (1) dikalikan 4, persamaan (3) dikalikan 1:

$$\begin{array}{rcl} 40 a + 240 b_1 & + 160 b_2 & = 680 \\ 40 a + 267 b_1 & + 182 b_2 & = 737 \\ \hline 0 a + -27 b_1 & + -22 b_2 & = -57 \\ -27 b_1 - 22 b_2 & & = -57 \quad \dots\dots\dots (5) \end{array}$$

## REGRESI LINIER BERGANDA (CONTOH 2)



Persamaan (4) dikalikan 27, persamaan (5) dikalikan 46:

$$\begin{array}{rcl} -1242 b_1 - 729 b_2 & = & -2754 \\ \underline{-1242 b_1 - 1012 b_2} & = & \underline{-2622} \\ 0 b_1 + 283 b_2 & = & -132 \\ b_2 & = & -132:283 = -0,466 \end{array}$$

Harga  $b_2$  dimasukkan ke dalam salah satu persamaan (4) atau (5):

$$\begin{array}{rcl} -46 b_1 - 27 (-0,466) & = & -102 \\ -46 b_1 + 12,582 & = & -102 \\ 114,582 & = & 46 b_1 \\ b_1 & = & 2,4909 \end{array}$$

## REGRESI LINIER BERGANDA (CONTOH 2)



Harga  $b_1$  dan  $b_2$  dimasukkan ke dalam persamaan 1:

$$\begin{aligned}10 a + 60 (2,4909) + 40 (-0,466) &= 170 \\10 a + 149,454 - 18,640 &= 170 \\170 - 149,454 + 18,640 &= 10 a \\a &= 39,186 : 10 = 3,9186\end{aligned}$$

**Jadi:**

$$\begin{aligned}a &= 3,9186 \\b_1 &= 2,4909 \\b_2 &= -0,466\end{aligned}$$

Persamaan Regresi Linier Berganda  $Y = 3,9186 + 2,4909 X_1 - 0,466 X_2$

**T E R I M A K A S I H**


Microphone icon | Video off icon | Hand icon | Screen share icon | More options icon | End call icon

Info icon | Participants icon (27) | Chat icon