Sistem Persamaan Linear

Metode Operasi Baris Elementer

Pertemuan 2

Contoh

Penerapan Sistem Persamaan Linear

- Penentuan besarnya kuat arus dari setiap aliran listrik dalam suatu jaringan listrik
- Menentukan banyaknya arus lalu lintas pada setiap perempatan jalan yang sedang diamati
- Menyelesaikan model ekonomi pertukaran barang.

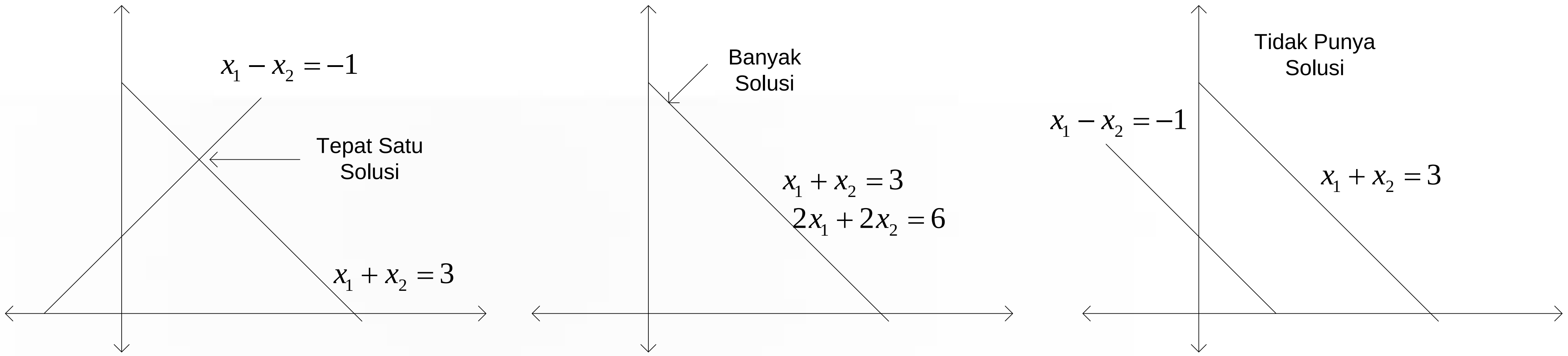
Sistem Persamaan Linear Secara Umum

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \quad \vdots \quad &\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{(m-1)1} & a_{(m-1)2} & \ldots & a_{(m-1)(n-1)} & a_{(m-1)n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{m(n-1)} & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{m-1} \\ b_m \end{bmatrix}$$

Kemungkinan Solusi dari SPL

- Tepat 1 solusi
- Jumlah solusi tak terhingga
- Tidak memiliki solusi



Representasi Geometri untuk 2 variable dan 2 persamaan

Sistem Persamaan Linear A nxn

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad\quad \vdots \quad\; \vdots \quad &\;\; \vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
a_{(n-1)} & a_{(n-1)2} & \ldots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\
a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{n(n-1)} & a_{nn}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix}$$

Substitusi Balik

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$

$$a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$

$$a_{33}x_3 = b_3$$

$$x_1 = \frac{b_1 - (a_{12}x_2 + a_{13}x_3)}{a_{11}}$$

$$x_2 = \frac{b_2 - a_{23}x_3}{a_{22}}$$

$$x_3 = \frac{b_3}{a_{33}}$$

Substitusi Balik untuk A 4x4

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1$$

$$a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2$$

$$a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3$$

$$a_{44}x_4 = b_4$$

Metode Eliminasi Gauss

- Penyelesaian SPL dengan metode eliminasi Gauss

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix}$$

- Substitusi Balik

$$x_n = b_n / a_{nn}$$

$$x_k = \frac{b_k - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj} x_j}{a_{kk}} \quad k = n-1, n-2, \dots, 1 \, \text{dan } a_{kk} \neq 0$$

Selesaikan SPL Berikut

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + \quad\quad\quad 3x_4 &= 4 \\
- x_2 - x_3 + 5x_4 &= -7 \\
3x_3 + 13x_4 &= 13 \\
- 13x_4 &= -13
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 12 \end{bmatrix}
$$

Operasi Baris Elementer

a) Pertukaran baris
b) Penskalaan baris (perkalian baris)
c) Penjumlahan baris dengan kelipatan baris lain

Metode Eliminasi Gauss Naif : menggunakan hanya operasi c)

Metode Gauss yang diperbaiki : menggunakan langkah a),b),c)

Contoh

- Gunakan metode eliminasi Gauss naif untuk menyelesaikan SPL berikut :

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 11 \\
4x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 17 \\
-2x_1 + 3x_2 - x_3 &= -1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + \quad\quad 3x_4 &= 4 \\
2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\
3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 &= -3 \\
-x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 4
\end{aligned}
$$

- Kelemahan metode ini ?

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + x_3 &= 2 \\
3x_1 + 6x_2 &= 9 \\
2x_1 + 8x_2 + 4x_3 &= 6
\end{aligned}
$$

Metode Eliminasi Gauss yang diperbaiki

- Pivoting sebagian: Untuk menentukan Pivot pada baris ke – k dan kolom ke – p dipilih semua elemen pada kolom p yang mempunyai nilai mutlak terbesar, lalu pertukarkan baris tersebut.
- Penskalaan/menormalkan baris : membagi tiap baris dengan nilai mutlak terbesar ruas kiri.

Pivoting Sebagian

Cari |x| terbesar, lalu pertukarkan barisnya dengan baris ke-2

$$\begin{pmatrix} x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \end{pmatrix}$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 2$$
$$3x_1 + 6x_2 = 9$$
$$2x_1 + 8x_2 + 4x_3 = 6$$

Latihan

- Selesaikan SPL berikut ini dengan menggunakan aturan pivoting

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 2$$
$$3x_1 + 6x_2 = 9$$
$$2x_1 + 8x_2 + 4x_3 = 6$$

Kemungkinan Solusi SPL

- Mempunyai solusi unik/tunggal

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{array}\right]$$

- Punya banyak solusi

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

- Tidak ada solusi sama sekali

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$