Eliminasi Gauss dan Eliminasi Gauss-Jordan

Pertemuan 3

Aljabar Linear untuk Sains Data

Sistem Persamaan Linear (SPL)

Contoh SPL

$$2x_1 - 5x_2 + x_3 = 4$$
$$x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 8$$

✍ Tentukan konstanta, ruas kanan, jumlah variabel dan banyak persamaan dari sistem persamaan disamping

Secara umum SPL dituliskan menjadi

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{matrix}$$

Suatu urutan bilangan-bilangan $s_1, s_2, \ldots, s_n$ disebut **himpunan penyelesaian sistem** jika

$$x_1 = s_1, x_2 = s_2, \ldots, x_n = s_n$$

memenuhi **setiap persamaan** dalam sistem tersebut.

Sistem Persamaan Linear (SPL)

Persamaan linear dengan *m* persamaan dan *n* buah variabel dapat dituliskan kembali menjadi

$$
\begin{matrix}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m
\end{matrix}
\Rightarrow
\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A}
\cdot
\underset{\bar{x}}{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}
=
\underset{\bar{b}}{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}
$$

Jika $\bar{b} = \bar{0}$ maka persamaan $A\bar{x} = \bar{0}$

disebut **sistem persamaan linear homogen.**

Kemungkinan Solusi SPL

a) **Konsisten** terdiri dari 2 kemungkinan yaitu punya **tepat satu** solusi dan **punya banyak solusi** (solusi tak terhingga jumlahnya)

b) **Tidak Konsisten**

Khusus untuk SPL homogen solusi akan selalu konsisten

Jika solusi SPL homogen adalah **tepat satu** nilai $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$

Maka solusi SPL homogen tersebut disebut **solusi trivial**

Jika ada penyelesaian lain yang memenuhi sistem persamaan tersebut maka penyelesaian sistemnya disebut **solusi** ***tak-trivial***.

Latihan

Gambarkan solusi dari SPL berikut menggunakan diagram Cartesian

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 5 \\ x_1 - x_2 &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 5 \\ x_1 + x_2 &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 5 \\ -x_1 - x_2 &= -5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 - x_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + \quad x_2 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Tentukan sistem persamaan yang mempunyai tepat satu solusi, punya banyak solusi, tidak punya solusi, solusi trivial dan solusi tak-trivial.

Matriks yang Diperluas (Augmented Matriks)

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{matrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

Latihan

Buatlah matriks yang diperluas

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= -15 \\ 5x_1 + 3x_2 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 &= 11 \\ -4x_2 + 2x_3 &= 30 \end{aligned}$$

Buatlah persamaan linear dari matriks berikut ini, tentukan pula solusinya

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & -8 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right)$$

Eliminasi Gaussian

Sebuah matriks dikatakan memiliki bentuk baris eselon

$$A=\begin{pmatrix}2&3&6\\0&0&0\\0&0&3\end{pmatrix} B=\begin{pmatrix}1&3&4\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix} C=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix} D=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&7&2\\0&0&0&1\end{pmatrix} E=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&0&1&5\\0&0&0&4\end{pmatrix} F=\begin{pmatrix}1&0&-1&2&3\\0&0&1&2&4\\0&0&1&-1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

1. Elemen bukan nol pertama dalam setiap baris adalah 1
2. Jika baris k tidak seluruhnya mengandung 0, maka banyak elemen nol bagian muka pada baris $k+1$ lebih besar dari banyaknya elemen nol di bagian depan baris k.
3. Jika terdapat baris-baris yang elemennya semuanya adalah nol, maka baris-baris ini berada tepat dibawah baris-baris yang memiliki elemen-elemen bukan nol.

Eliminasi Gaussian

Sebuah matriks dikatakan memiliki bentuk baris eselon tereduksi

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad b)\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad c) C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Syarat matriks baris eselon dipenuhi
2. Elemen bukan nol pertama dalam setiap baris adalah satu-satunya elemen bukan nol dalam kolom yang bersangkutan.

Eliminasi Gaussian

Bagaimana mengubah sembarang matriks menjadi matriks dengan bentuk baris eselon?

Bagaimana mengubah sembarang matriks menjadi matriks dengan bentuk baris eselon tereduksi?

Eliminasi Gaussian

Tiga langkah yang digunakan dalam OBE adalah:

1) Kalikan suatu baris dengan bilangan real bukan nol.
2) Pertukarkan dua baris
3) Ganti suatu baris dengan hasil penjumlahannya dengan kelipatan dari baris lain.

Eliminasi Gaussian

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{OBE}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\text{Eliminasi Gauss}}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\text{Eliminasi Gauss Jordan}}$$

Eliminasi Gaussian

Dapat digunakan untuk mencari solusi dari SPL

Tentukan penyelesaian dari sistem persamaan berikut ini

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 1 \\
x_1 + x_2 + 2x_3 &= 9 \\
3x_1 + 6x_2 - 5x_3 &= 0
\end{aligned}
$$

Latihan

Tentukan solusi dari SPL berikut ini

$$a)\quad \begin{aligned} 2x_1 + 2x_3 &= 4 \\ -2x_1 + x_2 &= -3 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 6 \end{aligned}$$

$$b)\quad \begin{aligned} x_1 + 2x_3 &= 1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 &= 3 \end{aligned}$$

$$c)\quad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 6 \\ x_1 + 8x_3 &= -6 \end{aligned}$$

$$d)\quad \begin{aligned} 6x + y &= 0 \\ x + 5y &= 0 \\ x &= 4y \end{aligned}$$

$$e)\quad \begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 10x_3 &= 0 \\ x_2 - 3x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Metode Eliminasi Gauss Jordan

Metode ini merupakan pengembangan metode eliminasi Gauss, hanya saja augmented matrik yang pada metode Eliminasi Gaus s diubah menjadi ***matrik segitiga***, pada metode Eliminasi Gauss Jordan diubah menjadi ***matrik diagonal***.

Matrik segitiga

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} & b_n \end{bmatrix}$$

Matrik diagonal

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & b_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & b_n \end{bmatrix}$$

Metode Eliminasi Gauss Jordan

- Langkah2 Metode Eliminasi Gauss Jordan
- 1. Buat matrik augmented
- 2. Buat matrik diagonal

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & d_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & d_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & d_n \end{bmatrix}$$

- 3. Penyelesaian dari persamaan linier simultan diatas adalah nilai d1,d2,d3,…,dn dan atau:

$$x_1 = d_1, x_2 = d_2, x_3 = d_3, \dots, x_n = d_n$$

Contoh

- Selesaikan persamaan linier simultan:

$$x_1 + x_2 = 3$$
$$2x_1 + 4x_2 = 8$$

- Dengan cara eliminasi biasa :

$$\begin{array}{rl|c|r}
x_1 + x_2 = 3 & & * 2 & 2x_1 + 2x_2 = 6 \\
2x_1 + 4x_2 = 8 & & * 1 & 2x_1 + 4x_2 = 8 \\
\hline
 & & & -2x_2 = -2 \\
 & & & \mathbf{x_2 = 1}
\end{array}$$

substitusi

$$x_1 + x_2 = 3$$
$$x_1 + 1 = 3$$
$$\mathbf{x_1 = 2}$$

Contoh

- Selesaikan persamaan linier simultan: $$x_1 + x_2 = 3$$ $$2x_1 + 4x_2 = 8$$
- Dengan cara eliminasi Gauss :

Augmented Matrik		Matrik Segitiga	dari baris terakhir :
$\left|\begin{matrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \end{matrix}\right|$	**B_2-$2B_1$** 2-2(1)=0 4-2(1)=2 8-2(3)=2	$\left|\begin{matrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{matrix}\right|$	$2x_2 = 2$ $x_2 = 1$

substitusi, dari baris 1 :

$x_1 + x_2 = 3$

$x_1 + 1 = 3$

$x_1 = 2$

Contoh

- Selesaikan persamaan linier simultan:

$$x_1 + x_2 = 3$$
$$2x_1 + 4x_2 = 8$$

- Dengan cara eliminasi Gauss :

Augmented Matrik

$$\left|\begin{matrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \end{matrix}\right|$$

B_2-2B_1

2-2(1)=0

4-2(1)=2

8-2(3)=2

Matrik Segitiga

$$\left|\begin{matrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{matrix}\right|$$

B_2/2

$$\left|\begin{matrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix}\right|$$

2/2 =1

2/2 =1

matrik diagonal

B_1-B_2

$$\left|\begin{matrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix}\right|$$

1-1=0

3-1=2

jadi $\boxed{x_1 = 2}$ dan $x_2 = 1$

Contoh

$$x + y + 2z = 9$$
$$2x + 4y - 3z = 1$$
$$3x + 6y - 5z = 0$$

Augmented matrik

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_2-2B_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

2-2(1)=0
4-2(1)=2
-3-2(2)=-7
1-2(9)=-17

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_3-3B_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$

3-3(1)=0
6-3(1)=3
-5-3(2)=-11
0-3(9)=-27

Contoh

$$x + y + 2z = 9$$
$$2x + 4y - 3z = 1$$
$$3x + 6y - 5z = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix} \xrightarrow{2B_3 - 3B_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

2(0)-3(0)=0
2(3)-3(2)=0
2(-11)-3(-7)=-1
2(-27)-3(-17)=-3

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_3 * -1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Contoh

$$
\begin{aligned}
x + \quad y + 2z &= 9 \\
2x + 4y - 3z &= 1 \\
3x + 6y - 5z &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}
\xrightarrow{B_2/2}
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -7/2 & -17/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -7/2 & -17/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}
\xrightarrow{B_1 - B_2}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 11/2 & 35/2 \\ 0 & 1 & -7/2 & -17/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}
$$

1-0=1
1-1=0
2-(-7/2)=11/2
9-(-17/2)=35/2

Contoh

$$x + \quad y + 2z = 9$$
$$2x + 4y - 3z = 1$$
$$3x + 6y - 5z = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 11/2 & 35/2 \\ 0 & 1 & -7/2 & -17/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_1 - 11/2\ (B3)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -7/2 & -17/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

1- 11/2 (0) =1
0- 11/2 (0) = 0
11/2 - 11/2 (1)=0
35/2- 11/2 (3)=1

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -7/2 & -17/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_2 + 7/2\ (B_3)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

0+ 7/2 (0) =0
1+ 7/2 (0) =1
-7/2 + 7/2 (1)=0
-17/2+ 7/2 (3)=4/2

Contoh

$$
\begin{aligned}
x + y + 2z &= 9 \\
2x + 4y - 3z &= 1 \\
3x + 6y - 5z &= 0
\end{aligned}
$$

Matrik Diagonal

$$
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 1 & 3
\end{bmatrix}
$$

Jadi :
x = 1, y = 2 dan z = 3

Coba dimasukkan ke soal :
1 + 2 + 2(3) = 9
2(1) + 4(2) - 3(3) = 1
3(1) + 6(2) - 5(3) = 0


terima
kasih