MATEMATIKA DISKRIT
Pertemuan 9

Egi Safitri, S.Mat., M.Si
Program Studi Sains Data
Fakultas Ilmu Komputer
Institut Informatika dan Bisnis Darmajaya, Bandar Lampung

2024

1. Pengenalan Induksi Matematika
   - Pengenalan Induksi Matematika
2. Langkah-langkah Induksi Matematika
3. Contoh Penggunaan Induksi Matematika
   - Prinsip Induksi Matematika
   - Prinsip Induksi yang dirampatkan

Pengenalan Induksi Matematika

- **Induksi Matematika:** Metode pembuktian dalam matematika.
- Digunakan untuk membuktikan propertis matematika untuk semua bilangan bulat positif.
- Mendasarkan pada ide bahwa jika suatu properti berlaku untuk suatu bilangan (biasanya 1), dan kita dapat membuktikan bahwa jika properti tersebut berlaku untuk suatu bilangan, maka properti tersebut juga berlaku untuk bilangan berikutnya, maka properti tersebut berlaku untuk semua bilangan yang lebih besar.

Contoh

Gunakan induksi matematik untuk membuktikan bahwa jumlah n buah bilangan ganjil positif pertama adalah n^2

Penyelesaian:

- Basis induksi: Untuk $n = 1$, jumlah satu buah bilangan ganjil positif pertama adalah $1^2 = 1$. Ini benar karena jumlah satu buah bilangan ganjil positif pertama adalah 1.

Langkah-langkah Induksi Matematika

1. **Langkah Basis:** Buktikan bahwa pernyataan tersebut benar untuk $n = 1$.
2. **Langkah Induksi:** Buktikan bahwa jika pernyataan tersebut benar untuk suatu n, maka pernyataan tersebut juga benar untuk $n + 1$.
3. Kesimpulan: Dengan menggunakan langkah basis dan langkah induksi, kita dapat menyimpulkan bahwa pernyataan tersebut benar untuk semua bilangan bulat positif.

Contoh 1

Example

Buktikan bahwa untuk setiap bilangan bulat positif dari 1 sampai n, adalah $\frac{n(n+1)}{2}$.

Bukti.

Misalkan $n = 6 \rightarrow p(6)$ adalah "Jumlah bilangan bulat positif dari 1 sampai 6 adalah $\frac{6(6+1)}{2}$" terlihat bahwa :
$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21 \rightarrow 6(7)/2 = 21$.
Sehingga proposisi (pernyataan) tersebut **benar**. $\square$

Contoh 2

Jumlah n buah bilangan ganjil positif pertama adalah n^2.

Bukti.

Misalkan $n = 6$ buah $(n = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ maka :

$$n = 1 \rightarrow 1 = 1 \rightarrow (1)^2 = 1$$
$$n = 2 \rightarrow 1 + 3 = 4 \rightarrow (2)^2 = 4$$
$$n = 3 \rightarrow 1 + 3 + 5 = 9 \rightarrow (3)^2 = 9$$
$$n = 4 \rightarrow 1 + 3 + 5 + 7 = 16 \rightarrow (4)^2 = 16$$
$$n = 5 \rightarrow 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 \rightarrow (5)^2 = 25$$
$$n = 6 \rightarrow 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36 \rightarrow (6)^2 = 36$$

Sehingga proposisi (pernyataan) tersebut **benar**. $\square$

Contoh Lainnya

1. Setiap bilangan bulat positif $n (n \geq 2)$ dapat dinyatakan sebagai perkalian dari (satu atau lebih) bilangan prima
2. Untuk semua $n \geq 1$, $n^3 + 2n$ adalah kelipatan 3
3. Untuk membayar biaya pos sebesar n sen dolar $(n \geq 8)$ selalu dapat digunakan hanya perangko 3 sen dan 5 sen dolar
4. Setiap tamu berjabat tangan dengan tamu lainnya hanya sekali. Jika ada n orang tamu maka jumlah jabat tangan yang terjadi adalah $\frac{n(n-1)}{2}$
5. Banyaknya himpunan bagian yang dapat dibentuk dari sebuah himpunan yang beranggotakan n elemen adalah $2n$.

Prinsip Induksi Sederhana

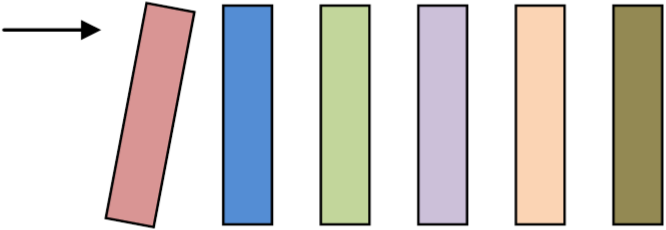
1. **Basis induksi**
   - Digunakan untuk memperlihatkan bahwa pernyataan benar bila n diganti dengan 1, yang merupakan bilangan bulat positif terkecil.
   - Buat implikasi untuk fungsi berikutnya benar untuk setiap bilangan bulat positif.
2. **Langkah induksi**
   - Berisi asumsi (andaian) yang menyatakan bahwa $p(n)$ benar.
   - Asumsi tersebut dinamakan hipotesis induksi.
3. Bila kedua langkah tersebut benar maka pembuktian bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan positif n.

prinsip Induksi Matematika

- Langkah 1 dinamakan basis induksi, sedangkan langkah 2 dinamakan langkah induksi.
- Langkah induksi berisi asumsi (andaian) yang menyatakan bahwa $p(n)$ benar. Asumsi tersebut dinamakan hipotesis induksi.
- Bila kita sudah menunjukkan kedua langkah tersebut benar maka kita sudah membuktikan bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n.

Prinsip-prinsip Induksi Matematika

Induksi matematika berlaku seperti efek domino.



Contoh 3

Tunjukkan bahwa untuk $n \geq 1, 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ melalui induksi matematika

- **Basis induksi**
  $p(1)$ benar $\rightarrow n = 1$ diperoleh dari :
  $$\begin{aligned} 1 &= 1(1+1)/2 \\ &= 1(2)/2 \\ &= 2/2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

- **Langkah induksi**
  Misalkan $p(n)$ benar $\rightarrow$ asumsi bahwa :
  $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
  Adalah benar (hipotesis induksi). Perlihatkan bahwa $p(n+1)$ juga benar yaitu :
  $1 + 2 + 3 + \ldots + n + (n+1) = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$

Lanjutan

$$
\begin{aligned}
1+2+3+\ldots+n+(n+1) &= (1+2+3+\ldots+n)+(n+1) \\
&= \frac{n(n+1)}{2}+(n+1) \\
&= \frac{(n^2+n)}{2}+(n+1) \\
&= \frac{(n^2+n)}{2}+\frac{(2n+2)}{2} \\
&= \frac{(n^2+3n+2)}{2} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\
&= \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}
\end{aligned}
$$

Lanjutan

Proof.

Langkah **basis induksi** dan **langkah induksi** dibuktikan benar, maka untuk semua bilangan bulat positif n, terbukti bahwa untuk semua $n \geq 1, 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ □

Contoh Soal 4

Gunakan induksi matematika untuk membuktikan bahwa jumlah n buah bilangan ganjil positif pertama adalah n^2

Contoh 3

1. **Basis induksi**
   $p(1)$ benar $\rightarrow$ jumlah 1 buah bilangan ganjil positif pertama adalah $1^2 = 1$
2. **Langkah induksi**
   Misalkan $p(n)$ benar $\rightarrow$ asumsi bahwa :
   $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$ adalah benar (hipotesis induksi).
   Perlihatkan bahwa $p(n + 1)$ juga benar, yaitu :
   $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) + (2n + 1) = (n + 1)^2$ Hal ini dapat ditunjukkan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) + (2n + 1) &= [1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)] + \\ &= n^2 + (2n + 1) \\ &= n^2 + 2n + 1 \\ &= (n + 1)^2 \end{aligned}$$

Langkah 1 dan 2 dibuktikan benar, maka untuk jumlah n buah bilangan ganjil positif pertama adalah n^2.

Prinsip Induksi yang dirampatkan

- Prinsip induksi sederhana dapat dirampatkan (generalized)
- Misalkan $p(n)$ adalah pernyataan perihal bilangan bulat positif.
- Kita ingin membuktikan bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n.
- Untuk membuktikan pernyataan ini, kita hanya perlu menunjukkan bahwa:
  1. $p(1)$ benar, dan
  2. jika $p(n)$ benar, maka $p(n+1)$ juga benar, untuk setiap $n \geq 1$,
- Sehingga $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n.

Contoh 5

Untuk semua bilangan bulat tidak negatif n, buktikan dengan induksi matematika bahwa $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

Penyelesaian

Misalkan $p(n)$ adalah proposisi bahwa untuk semua bilangan bulat tidak negatif n, $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

1. Basis induksi
   $p(0)$ benar $\rightarrow$ untuk $n = 0$ (bilangan bulat tidak negatif pertama) diperoleh dari :

$$\begin{aligned} 2^0 = 1 &= 2^{0+1} - 1 \\ &= 2^1 - 1 \\ &= 2–1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

2. Langkah induksi
   Misalkan $p(n)$ benar, yaitu proposisi :
   $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ Diasumsikan benar (hipotesis induksi). Perlihatkan bahwa $p(n+1)$ juga benar, yaitu :
   $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n + 2^{n+1} = 2^{(n+1)+1} - 1$

Lanjutan

Hal ini dapat ditunjukkan sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n + 2^{n+1} &= (2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n) + 2^{n+1} \\
&= 2^{(n+1)+1} - 1 + 2^{n+1} \text{dari hipotesis induksi} \\
&= (2^{n+1} + 2^{n+1}) - 1 \\
&= (2 \cdot 2^{n+1}) - 1 \\
&= 2^{n+2} - 1 \\
&= 2^{(n+1)+1} - 1
\end{aligned}$$

Langkah **(1)** dan **(2)** dibuktikan benar, maka untuk semua bilangan bulat tidak negatif n, terbukti bahwa $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$