ALJABAR LINIER UNTUK SAINS DATA

Pertemuan 9

Egi Safitri, S.Mat., M.Si
Program Studi Sains Data
Institut Informatika dan Bisnis Darmajaya, Bandar Lampung

2024

Interpretasi Matriks sebagai Fungsi

Secara informal, sebuah fungsi adalah suatu aturan yang menerima masukan dan menghasilkan keluaran. Sebagai contoh, $f(x) = x^2$ adalah sebuah fungsi yang menerima satu bilangan x sebagai masukannya, dan menghasilkan kuadrat dari bilangan tersebut: $f(2) = 4$. Pada subbagian ini, kita menginterpretasikan matriks sebagai fungsi.

Misalkan A adalah sebuah matriks dengan m baris dan n kolom. Pertimbangkan persamaan matriks $\mathbf{b} = A\mathbf{x}$ (kita menulisnya seperti ini alih-alih $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ untuk mengingatkan pembaca akan notasi $y = f(x)$). Jika kita variasikan $\mathbf{x}$, maka $\mathbf{b}$ juga akan berubah; dengan cara ini, kita memandang A sebagai suatu fungsi dengan variabel independen $\mathbf{x}$ dan variabel dependen $\mathbf{b}$.

Interpretasi Matriks sebagai Fungsi

Secara umum, variabel independen (input) adalah $\mathbf{x}$, yang merupakan vektor dalam $\mathbb{R}^n$. Variabel dependen (output) adalah $\mathbf{b}$, yang merupakan vektor dalam $\mathbb{R}^m$.
Dalam konteks ini, matriks A dapat dianggap sebagai fungsi yang memetakan vektor input $\mathbf{x}$ menjadi vektor output $\mathbf{b}$, yaitu:

$$\mathbf{b} = A\mathbf{x}$$

di mana A adalah matriks dengan m baris dan n kolom.

Refleksi

Misalkan

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Deskripsikan fungsi $\mathbf{b} = A\mathbf{x}$ secara geometris.

Solusi. Dalam persamaan $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, vektor masukan $\mathbf{x}$ dan vektor keluaran $\mathbf{b}$ keduanya berada di $\mathbb{R}^2$. Pertama-tama, kita kalikan A dengan sebuah vektor untuk melihat apa yang terjadi:

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}.$$

Perkalian dengan A membalikkan koordinat x: ini merupakan refleksi terhadap sumbu y.

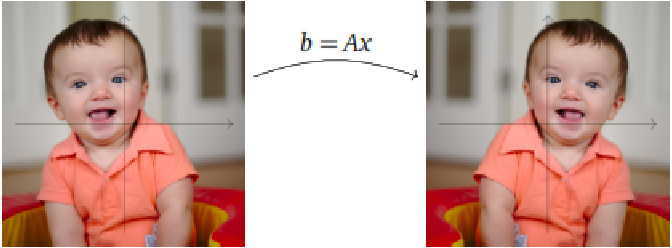

Figure: Contoh transformasi matriks refleksi

Dilatasi

Misalkan

$$A = \begin{pmatrix} 1.5 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{pmatrix}$$

Jelaskan fungsi $\mathbf{b} = A\mathbf{x}$ secara geometris.

Solusi. Dalam persamaan $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, vektor input $\mathbf{x}$ dan vektor output $\mathbf{b}$ keduanya berada di $\mathbb{R}^2$. Pertama-tama kita akan mengalikan A dengan sebuah vektor untuk melihat apa yang terjadi:

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5x \\ 1.5y \end{pmatrix} = 1.5\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Perkalian dengan A sama dengan perkalian skalar dengan 1.5: ini mengskalakan atau memperbesar bidang dengan faktor 1.5.

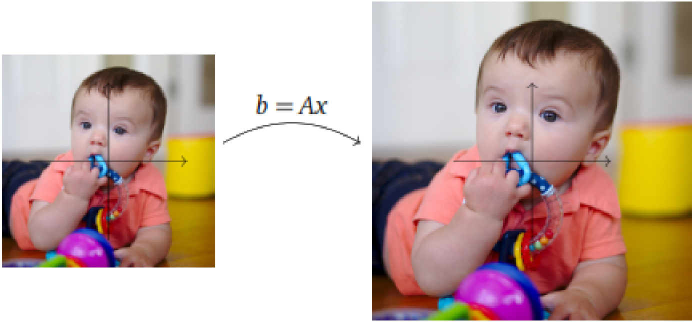

Figure: Contoh transformasi matriks dilatasi

Identitas

Misalkan

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Jelaskan fungsi $b = Ax$ secara geometris.
Solusi. Dalam persamaan $Ax = b$, vektor input x dan vektor output b keduanya berada dalam $\mathbb{R}^2$. Pertama, kita kalikan A dengan sebuah vektor untuk melihat apa yang terjadi:

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Perkalian dengan A tidak mengubah vektor input sama sekali: ini adalah transformasi identitas yang tidak melakukan apa pun.

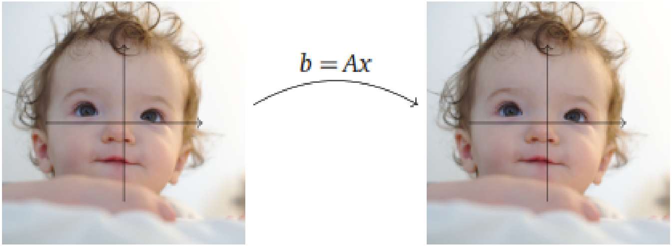

Figure: Contoh transformasi matriks identitas

Rotasi

Misalkan

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Deskripsikan fungsi $\mathbf{b} = A\mathbf{x}$ secara geometris. Solusi. Dalam persamaan $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, vektor input $\mathbf{x}$ dan vektor output $\mathbf{b}$ keduanya berada di $\mathbb{R}^2$. Pertama, kita mengalikan A dengan sebuah vektor untuk melihat apa yang dilakukannya:

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

Kita substitusi beberapa titik uji untuk memahami geometri dari transformasi tersebut:

$$A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$$

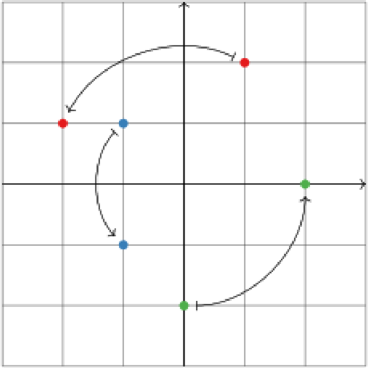

Figure: Contoh titik uji geometri

Perkalian dengan A adalah rotasi berlawanan arah jarum jam sebesar 90 derajat.

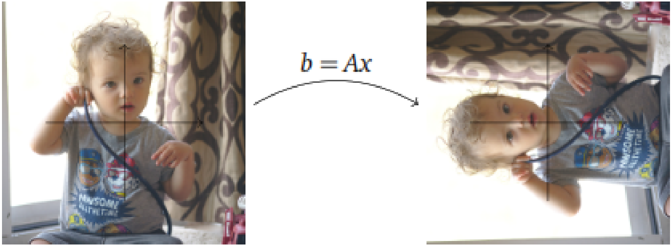

Figure: Contoh transformasi matriks rotasi

Shear

Misalkan

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jelaskan fungsi $\mathbf{b} = A\mathbf{x}$ secara geometris.

Solusi. Dalam persamaan $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, vektor input $\mathbf{x}$ dan vektor output $\mathbf{b}$ keduanya berada dalam $\mathbb{R}^2$. Pertama, kita mengalikan A dengan sebuah vektor untuk melihat apa yang dilakukannya:

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ y \end{pmatrix}.$$

Perkalian dengan A menambahkan koordinat y ke koordinat x; ini disebut sebagai shear dalam arah x.

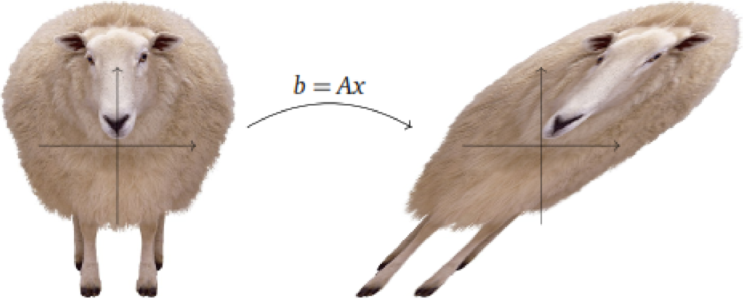

Figure: Contoh transformasi matriks shear

Pengenalan Transformasi Linier

- Transformasi linier adalah fungsi antara dua ruang vektor yang mempertahankan operasi penjumlahan vektor dan perkalian skalar.
- Dapat digunakan untuk memetakan satu set data ke ruang vektor lainnya.

Representasi Matriks Transformasi Linier

- Setiap transformasi linier dapat direpresentasikan oleh sebuah matriks.
- Contoh:

$$T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Transformasi Linear

Misalkan V dan W adalah ruang vektor, $T : V \rightarrow W$ dinamakan transformasi linear jika untuk setiap $\mathbf{v}, \mathbf{u}$ dalam V dan setiap skalar c berlaku:

- **Additivitas**: $T(\mathbf{v} + \mathbf{u}) = T(\mathbf{v}) + T(\mathbf{u})$
  Artinya, transformasi dari jumlah dua vektor sama dengan jumlah dari transformasi masing-masing vektor.
- **Homogenitas**: $T(c\mathbf{v}) = cT(\mathbf{v})$
  Artinya, transformasi dari hasil perkalian skalar dengan vektor sama dengan hasil perkalian skalar dengan transformasi vektor.

Jika $V = W$, maka T dinamakan **operator linear**.

Contoh 1

Tunjukkan bahwa $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, di mana

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ -x \\ y \end{pmatrix}$$

merupakan transformasi linear.

Jawab:

Ambil unsur $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ sembarang di $\mathbb{R}^2$, misalkan $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ dan $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

(i) Akan ditunjukkan bahwa $T(\mathbf{u} + \mathbf{v})$

$$
\begin{aligned}
T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} (x_1+y_1)-(x_2+y_2) \\ -(x_1+y_1) \\ x_2+y_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (x_1+y_1)-(x_2+y_2) \\ -x_1-y_1) \\ x_2+y_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_1-x_2 \\ -x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1-y_2 \\ -y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\
&= T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})
\end{aligned}
$$

Sehingga diperoleh $T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$. Terbukti bahwa T adalah transformasi linier.

Contoh 2

Misalkan T merupakan suatu transformasi dari $M_{2\times 2}$ ke $\mathbb{R}$ yang didefinisikan oleh $T(A) = \det(A), \quad$ untuk setiap $A \in M_{2\times 2}$.
Apakah T merupakan transformasi linear?
Jawab:
Misalkan $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}$. Maka, untuk setiap $\lambda \in \mathbb{R}$ dan $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}$, berlaku:

$$
\begin{aligned}
T(\lambda A) = \det(\lambda A) = det \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{pmatrix} \\
&= \lambda^2 (a_1 a_4 - a_2 a_3) \\
&= \lambda^2 \det(A) \\
&= \lambda^2 T(A)
\end{aligned}
$$

dan

$$
\begin{aligned}
T(A+B) &= \det(A+B) \\
&= \det(A) + \det(B) + \det(AB) \\
&= T(A) + T(B) + \det(AB).
\end{aligned}
$$

Namun, pada umumnya, $\det(AB) \neq a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}$.
Oleh karena itu, T bukan transformasi linear.

Contoh 3

Periksa apakah $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, di mana

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - y \\ y \\ x \end{pmatrix}$$

merupakan transformasi linier.

Jawab: Misalkan $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ dan $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ adalah vektor-vektor sembarang di $\mathbb{R}^2$ dan c adalah skalar sembarang. Kita periksa sifat-sifat transformasi linier.

(i) **Additivitas**:

$$
\begin{aligned}
T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) \\
&= T\left(\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} 3(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) \\ y_1 + y_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (3x_1 - y_1) + (3x_2 - y_2) \\ y_1 + y_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3x_1 - y_1 \\ y_1 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3x_2 - y_2 \\ y_2 \\ x_2 \end{pmatrix} \\
&= T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})
\end{aligned}
$$

(ii) **Homogenitas**:

$$
\begin{aligned}
T(c\mathbf{u}) &= T\left(c\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \\
&= T\begin{pmatrix} cx \\ cy \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3(cx) - cy \\ cy \\ cx \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} c(3x - y) \\ cy \\ cx \end{pmatrix} \\
&= c\begin{pmatrix} 3x - y \\ y \\ x \end{pmatrix} \\
&= cT(\mathbf{u})
\end{aligned}
$$

Karena T memenuhi kedua sifat tersebut, maka T merupakan

Contoh Transformasi Linier dalam Konteks Sains Data

- Principal Component Analysis (PCA)
- Singular Value Decomposition (SVD)
- Regresi Linear

Contoh Transformasi Linier dalam Konteks Sains Data

- **Principal Component Analysis (PCA)**:
  - Metode untuk mengurangi dimensi data dengan memproyeksikannya ke ruang dimensi yang lebih rendah yang disebut ruang komponen utama.
  - Berguna dalam analisis data besar dan reduksi fitur.
- **Singular Value Decomposition (SVD)**:
  - Metode untuk menganalisis dan merekonstruksi matriks dengan membaginya menjadi tiga matriks: matriks singular, matriks kiri singular, dan matriks kanan singular.
  - Digunakan dalam berbagai aplikasi seperti kompresi gambar, pemrosesan sinyal, dan pemodelan data.
- **Regresi Linear**:
  - Teknik statistik yang digunakan untuk memodelkan hubungan antara satu atau lebih variabel independen dengan variabel dependen dengan menggunakan garis lurus yang paling sesuai.
  - Digunakan untuk memprediksi nilai berdasarkan hubungan linier antara variabel.

Properti Transformasi Linier

- Injektif, surjektif, dan bijektif
- Kernel dan Image
- Nilai dan vektor eigen dalam transformasi linier

Properti Transformasi Linier

- **Injektif, Surjektif, dan Bijektif**:
  - **Injektif**: Jika setiap vektor input memiliki tepat satu vektor output.
  - **Surjektif**: Jika setiap vektor output memiliki paling tidak satu vektor input yang terkait.
  - **Bijektif**: Jika transformasi tersebut bersifat injektif dan surjektif, artinya setiap vektor input memiliki tepat satu vektor output dan setiap vektor output memiliki paling tidak satu vektor input yang terkait.
- **Kernel dan Image**:
  - **Kernel**: Ruang vektor dari semua vektor input yang dipetakan ke nol oleh transformasi linier.
  - **Image**: Ruang vektor dari semua vektor output yang dihasilkan oleh transformasi linier.
- **Nilai dan Vektor Eigen dalam Transformasi Linier**:
  - **Nilai Eigen**: Nilai skalar yang merepresentasikan faktor perbesaran atau pemendekan dalam arah vektor eigen.
  - **Vektor Eigen**: Vektor yang tidak berubah arah setelah dikenai transformasi linier.

Contoh Penggunaan Properti

- Injektif: Transformasi yang tidak mengubah dimensi gambar.
- Surjektif: Transformasi yang mencakup seluruh ruang hasil.
- Bijektif: Transformasi yang bersifat satu-satu dan onto.
- Nilai eigen: Vektor yang tidak berubah arah setelah transformasi.