

ALJABAR LINIER

Pertemuan 13

Egi Safitri, S.Mat., M.Si
Institut Informatika dan Bisnis Darmajaya, Bandar Lampung

2024

- 1 Definisi Diagonalisasi Matriks
- 2 Proses Diagonalisasi
- 3 Penerapan Diagonalisasi dalam Menyelesaikan Persamaan Matriks
- 4 Contoh Soal dan Penyelesaian
- 5 Contoh Soal Diagonalisasi Matriks 3×3
- 6 Penyelesaian

Definisi Diagonalisasi Matriks

- Diagonalisasi adalah proses mengubah sebuah matriks menjadi bentuk diagonal yang serupa dengan matriks asli.
- Matriks A dapat didiagonalisasi jika terdapat matriks invertibel P dan matriks diagonal D sehingga $A = PDP^{-1}$.
- Matriks D berisi nilai-nilai eigen dari matriks A .

Langkah-langkah:

- 1 Cari nilai-nilai eigen λ dari matriks A dengan menyelesaikan persamaan karakteristik $\det(A - \lambda I) = 0$.
- 2 Untuk setiap nilai eigen λ , cari vektor eigen v dengan menyelesaikan sistem persamaan linear $(A - \lambda I)v = 0$.
- 3 Bentuk matriks P yang kolom-kolomnya adalah vektor-vektor eigen.
- 4 Bentuk matriks diagonal D yang elemen-elemen diagonalnya adalah nilai-nilai eigen.

Penerapan Diagonalisasi dalam Menyelesaikan Persamaan Matriks

- Jika A dapat didiagonalisasi, maka persamaan matriks A^k dapat diselesaikan dengan lebih mudah.
- Misalkan $A = PDP^{-1}$, maka $A^k = PD^kP^{-1}$.
- Matriks D^k mudah dihitung karena D adalah matriks diagonal.
- Contoh: $A^2 = PD^2P^{-1}$.

Diagonalisasikan matriks A :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Langkah 1: Cari nilai eigen λ

- Persamaan karakteristik:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \implies \det \begin{pmatrix} 4 - \lambda & 1 \\ 2 & 3 - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

- Hitung determinan:

$$(4 - \lambda)(3 - \lambda) - 2 = 0$$

- Selesaikan persamaan kuadrat:

$$\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0 \implies \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 5.$$

Langkah 2: Cari vektor eigen

- Untuk $\lambda = 2$:

$$(A - 2I)v = 0 \implies \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \implies v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

- Untuk $\lambda = 5$:

$$(A - 5I)v = 0 \implies \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \implies v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vektor Eigen

Sistem persamaan sebelumnya dapat ditulis sebagai:

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases}$$

Persamaan pertama $-x + y = 0$ menunjukkan bahwa $y = x$. Persamaan kedua $2x - 2y = 0$ juga menyederhanakan menjadi $x = y$, yang konsisten dengan persamaan pertama. Karena $y = x$, kita dapat memilih nilai x secara bebas untuk mendapatkan vektor eigen yang sesuai. Vektor eigen adalah vektor non-nol yang memenuhi persamaan tersebut. Jadi, kita dapat memilih $x = 1$.

Oleh karena itu, vektor eigen yang sesuai adalah:

$$v_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Penyelesaian: Matriks P dan D

- Matriks P dan D :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Verifikasi $A = PDP^{-1}$

- Invers matriks P :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

- Hitung PDP^{-1} :

$$PD = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

- Lanjutkan perhitungan:

$$PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

- Hitung hasilnya:

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 1/3 + 5 \cdot 2/3 & 2 \cdot -1/3 + 5 \cdot 1/3 \\ -4 \cdot 1/3 + 5 \cdot 2/3 & -4 \cdot -1/3 + 5 \cdot 1/3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2/3 + 10/3 & -2/3 + 5/3 \\ -4/3 + 10/3 & 4/3 + 5/3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 12/3 & 3/3 \\ 6/3 & 9/3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = A \end{aligned}$$

Diagonalisasikan matriks A berikut:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Langkah 1: Cari Nilai Eigen

- Tentukan nilai eigen λ dengan menyelesaikan persamaan karakteristik:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

- Matriks $A - \lambda I$:

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 4 - \lambda & 1 & 0 \\ 1 & 4 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3 - \lambda \end{pmatrix}$$

- Hitung determinan:

$$(4 - \lambda)^2(3 - \lambda) - 1 \cdot 1 \cdot (3 - \lambda) = 0$$

- Persamaan karakteristik:

$$(16 - 8\lambda + \lambda^2)(3 - \lambda) - (3 - \lambda) = 0$$

$$(3 - \lambda)(\lambda^2 - 8\lambda + 15) = 0$$

$$\lambda = 3, 3, 5$$

Langkah 2: Cari Vektor Eigen

Untuk $\lambda = 3$:

$$(A - 3I)v = 0 \implies \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Untuk $\lambda = 5$:

$$(A - 5I)v = 0 \implies \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Langkah 3: Bentuk Matriks P dan D

- Matriks P :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Matriks D :

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Langkah-langkah Mencari Invers

Langkah-langkah mencari invers matriks P menggunakan metode Gauss-Jordan:

- 1 Gabungkan matriks P dengan matriks identitas I :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

- 2 Terapkan operasi baris elementer untuk mengubah P menjadi matriks identitas.

Operasi Baris Elementer

- Tambahkan baris pertama ke baris kedua:

$$R2 \leftarrow R2 + R1 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

- Bagi baris kedua dengan 2:

$$R2 \leftarrow \frac{1}{2}R2 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

- Kurangi baris pertama dengan baris kedua:

$$R1 \leftarrow R1 - R2 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

- Tukar baris kedua dengan baris ketiga:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array} \right)$$

Matriks invers P^{-1} adalah:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Verifikasi $A = PDP^{-1}$

- Invers matriks P :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

- Hitung PDP^{-1} :

$$\begin{aligned} PDP^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= A \end{aligned}$$

- 1 Tentukan matriks eigen dan matriks diagonal dari matriks berikut:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

- 2 Verifikasi bahwa $PDP^{-1} = A$ dengan menggunakan matriks P dan D yang telah Anda temukan.
- 3 Hitung A^{10} menggunakan matriks diagonalisasi.

Contoh: Bagian 1

- 1 Tentukan matriks eigen dan matriks diagonal dari matriks berikut:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Jawaban: Untuk menemukan matriks eigen, kita cari nilai-nilai eigen dari matriks A dengan mencari akar karakteristiknya:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= 0 \\ \det \left(\begin{pmatrix} 3 - \lambda & 1 \\ 1 & 3 - \lambda \end{pmatrix} \right) &= 0 \\ (3 - \lambda)(3 - \lambda) - 1 &= 0 \\ \lambda^2 - 6\lambda + 8 &= 0 \\ (\lambda - 4)(\lambda - 2) &= 0 \end{aligned}$$

Jadi, nilai eigen dari A adalah $\lambda_1 = 4$ dan $\lambda_2 = 2$.

Contoh: Bagian 2

- 2 Verifikasi bahwa $PDP^{-1} = A$ dengan menggunakan matriks P dan D yang telah Anda temukan.

Jawaban: Matriks P adalah matriks yang terdiri dari vektor eigen dari A sebagai kolom-kolomnya, dan P^{-1} adalah invers dari P :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Jadi,

$$PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- ③ Hitung A^{10} menggunakan matriks diagonalisasi.

Jawaban: Diketahui bahwa

$$A^{10} = (PDP^{-1})^{10} = (PD^{10}P^{-1})$$

dengan D^{10} adalah matriks D yang setiap entri diagonalnya dipangkatkan dengan 10. Selanjutnya, substitusi D^{10} , P , dan P^{-1} ke dalam persamaan.

Contoh Penggunaan Diagonalisasi

Analisis Komponen Utama (PCA): PCA adalah teknik yang umum digunakan dalam analisis data untuk mengurangi dimensi dari dataset yang kompleks. Dalam PCA, diagonalisasi matriks kovariansi dari dataset memungkinkan kita untuk mendapatkan matriks transformasi ortogonal yang mengubah data ke ruang dimensi yang lebih kecil dengan mempertahankan sebanyak mungkin informasi tentang variabilitas dalam data.