

ALJABAR LINIER

Pertemuan 12

Egi Safitri, S.Mat., M.Si
Institut Informatika dan Bisnis Darmajaya, Bandar Lampung

2024

1 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Definisi Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Definisi

Andaikan A matriks $n \times n$. Suatu vektor tak nol $x \in \mathbb{R}^n$ disebut **Vektor Eigen** dari A jika Ax adalah kelipatan skalar dari x dengan sembarang $\lambda \in \mathbb{R}$, dan berlaku

$$Ax = \lambda x$$

Dalam hal ini λ disebut **Nilai Eigen** dari A yang berkorespondensi dengan Vektor Eigen x .

Teorema

Jika A matriks $n \times n$, maka λ disebut Nilai Eigen dari A jika dan hanya jika berlaku persamaan

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

Persamaan ini disebut **Persamaan Karakteristik** dari matriks A .

Contoh 1

Example

Tentukan pasangan eigen (Nilai Eigen dan Vektor Eigen) dari matriks $A \in M_2(\mathbb{R})$ berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Solusi

Persamaan karakteristik:

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{bmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0$$

Nilai eigen: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$.

Contoh 1 (Lanjutan)

Solusi

Untuk $\lambda = 1$:

$$(\lambda I - A)x = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Solusi: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, sehingga pasangan eigen untuk $\lambda = 1$ adalah:

$$\left(1, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

Contoh 1 (Lanjutan)

Solusi

Untuk $\lambda = 3$:

$$(\lambda I - A)x = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Solusi: $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, sehingga pasangan eigen untuk $\lambda = 3$ adalah:

$$\left(3, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

Teorema: Matriks Segitiga

Teorema

Andaikan A matriks segitiga $n \times n$ (Matriks Segitiga Atas, Matriks Segitiga Bawah, dan Matriks Diagonal), maka nilai-nilai eigen dari A adalah entri-entri yang terletak pada diagonal utama matriks A .

Example

Nilai eigen dari matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1 & 2/3 & 0 \\ 5 & -8 & -1/4 \end{bmatrix}$$

adalah $\lambda_1 = 1/2$, $\lambda_2 = 2/3$, $\lambda_3 = -1/4$.

Definisi

Vektor-vektor eigen matriks A yang terkait dengan sebuah nilai eigen λ adalah vektor-vektor tak nol x yang memenuhi persamaan $Ax = \lambda x$. Dengan kata lain, vektor-vektor eigen yang terkait dengan λ adalah vektor-vektor tak nol dalam ruang solusi

$$(\lambda I - A)x = 0$$

yang disebut sebagai **Ruang Eigen** dari matriks A yang terkait dengan nilai eigen λ .

Contoh 2

Example

Tentukan basis untuk ruang eigen dari matriks

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

Solusi

Persamaan karakteristik:

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0$$

Nilai eigen: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -1$.

Contoh 2 (Lanjutan)

Solusi

Untuk $\lambda = 3$:

$$(\lambda I - A)x = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -8 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Solusi: $x_1 = 1/2s$, $x_2 = s$, sehingga basis untuk ruang eigen dengan $\lambda = 3$ adalah:

$$\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Contoh 2 (Lanjutan)

Solusi

Untuk $\lambda = -1$:

$$(\lambda I - A)x = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ -8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Solusi: $x_1 = 0$, $x_2 = s$, sehingga basis untuk ruang eigen dengan $\lambda = -1$ adalah:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Tentukan nilai eigen dan basis-basis untuk ruang eigen dari matriks

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

- Nilai eigen dan vektor eigen adalah konsep dasar dalam aljabar linear yang sangat penting.
- Persamaan karakteristik digunakan untuk menemukan nilai-nilai eigen dari sebuah matriks.
- Vektor-vektor eigen yang terkait dengan nilai eigen tertentu membentuk ruang eigen.