ALJABAR LINIER UNTUK SAINS DATA
Pertemuan 14

Egi Safitri, S.Mat., M.Si
Program Studi Sains Data
Fakultas Ilmu Komputer
Institut Informatika dan Bisnis Darmajaya, Bandar Lampung

2024

1. Pengenalan SVD
2. Komponen Utama SVD
3. Interpretasi Geometris SVD
4. Contoh

Apa itu SVD?

Singular Value Decomposition (SVD) adalah suatu teknik dalam aljabar linear yang memfaktorkan suatu matriks A menjadi tiga matriks: U, Σ, dan V^T.

$$A = U\Sigma V^T$$

Matriks U, Σ, dan V^T

- U adalah matriks ortogonal yang kolom-kolomnya adalah eigenvektor dari AA^T.
- Σ adalah matriks diagonal yang elemen-elemen diagonalnya adalah akar dari eigenvalue dari AA^T atau A^TA.
- V^T adalah matriks ortogonal yang baris-barisanya adalah eigenvektor dari A^TA.

Matriks Singular (U)

- Matriks U adalah matriks ortogonal dengan ukuran $m \times m$.
- Kolom-kolom dari U adalah eigenvektor dari AA^T.
- Setiap kolom dari U adalah vektor singular kiri dari matriks A.

$$AA^T = U\Sigma^2 U^T$$

Nilai Singular (Σ)

- Matriks Σ adalah matriks diagonal dengan ukuran $m \times n$.
- Elemen-elemen diagonal dari Σ adalah nilai singular (σ_i) dari matriks A.
- Nilai singular adalah akar dari eigenvalue dari AA^T atau A^TA.

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_r \end{pmatrix}$$

Vektor Singular (V)

- Matriks V adalah matriks ortogonal dengan ukuran $n \times n$.
- Kolom-kolom dari V adalah eigenvektor dari $A^T A$.
- Setiap kolom dari V adalah vektor singular kanan dari matriks A.

$$A^T A = V \Sigma^2 V^T$$

Transformasi Linier

Transformasi linier adalah operasi yang mengubah suatu vektor dengan cara tertentu tanpa mengubah struktur dasar ruang vektor tersebut.

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x}$$

di mana A adalah matriks transformasi, $\mathbf{x}$ adalah vektor asli, dan $\mathbf{y}$ adalah vektor hasil transformasi.

Interpretasi Geometris

Secara geometris, SVD dapat diinterpretasikan sebagai tiga transformasi berturut-turut:

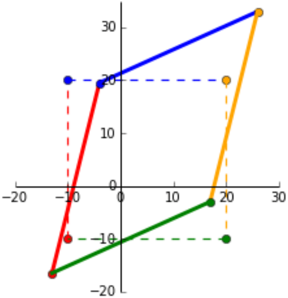
1. Rotasi oleh V^T
2. Skalasi oleh Σ
3. Rotasi oleh U

$$A = U\Sigma V^T$$

Interpretasi Geometri

For this post, Im going to use the same matrices from my post on eigenvectors and eigenvalue

We have a matrix $x = \begin{bmatrix} -10 & -10 & 20 & 20 \\ -10 & 20 & 20 & -10 \end{bmatrix}$ and a transformation matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 0.3 \\ 0.45 & 1.2 \end{bmatrix}$. In the plot below, the dashed square shows x as the corners and the transformed matrix Ax as the solid shape.

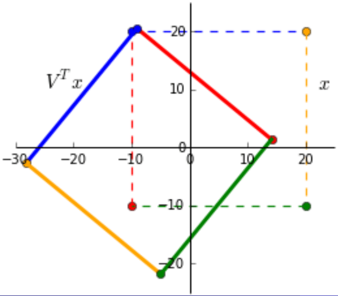


$V^T x$

Transformation of a matrix by USV^T can be visualised as a *rotation and reflection, scaling, rotation and reflection*. We'll see this as a step-by-step visualisation.

(1) $V^T x$

We can see that multiplying by V^T rotates and reflects the input matrix x. Notice the swap of colours red-blue and green-yellow indicating a reflection along the x-axis.



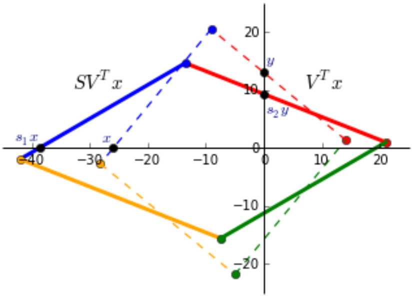
$\Sigma V^T x$

Since S only contains values on the diagonal, it simply scales the matrix. The singular values S are ordered in descending order so $s_1 > s_2 > \ldots > s_n$. V rotates the matrix to a position where the singular values now represent the scaling factor along the x and y-axis. This is now the *V-basis*.

The black dots shows this ($V^T x$ is dashed and $SV^T x$ solid):

- $V^T x$ intercepts the x-axis at $x = -25.91$.
- Largest singular value of $s_1 = 1.49$ is applied and $s_1 x = -38.61$.
- $V^T x$ intercepts the y-axis at $y = 12.96$.
- Smallest singular value of $s_2 = 0.71$ is applied and $s_2 y = 9.20$.

$\sum V^T x$

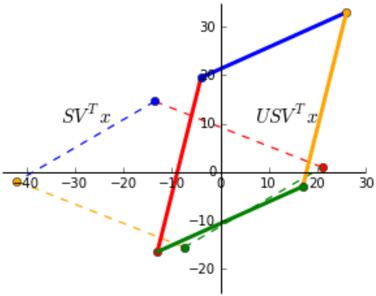


SVx_plot

While not shown, there is a similar rotation and scaling effect in the *U-basis* with $\boldsymbol{Ux}$ and $\boldsymbol{SUx}$.

$U \Sigma V^T x$

Finally, $\boldsymbol{U}$ rotates and reflects the matrix back to the standard basis. As expected, this is exactly the same as $\boldsymbol{Ax}$.



Contoh Soal SVD

Diberikan matriks:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tentukan Singular Value Decomposition (SVD) dari matriks A.

Penyelesaian Soal SVD

- Matriks A memiliki bentuk (3×2), sehingga U akan berukuran (3×3), Σ berukuran (3×2), dan V berukuran (2×2).
- Pertama, hitung $A^T A$:

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Eigenvalue dari $A^T A$ adalah 1 dan 1. Eigenvektor adalah kolom dari matriks identitas (2×2):

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Selanjutnya, hitung U dari AA^T:

$$AA^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Eigenvalue dari AA^T adalah 1, 1, dan 0. Eigenvektor adalah kolom dari matriks identitas (3×3):

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Matriks Σ adalah:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Sehingga, SVD dari A adalah:

$$A = U\Sigma V^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Contoh Soal

Diberikan matriks

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Tentukan SVD dari matriks A.

- Hitung $A^T A$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$$

Langkah 2: Hitung Eigenvalue dan Eigenvektor A^TA

$$\begin{vmatrix} 10-\lambda & 6 \\ 6 & 10-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(10-\lambda)^2 - 36 = 0$$

$$\lambda^2 - 20\lambda + 64 = 0$$

$$\lambda_1 = 16, \quad \lambda_2 = 4$$

Eigenvektor untuk $\lambda_1 = 16$:

$$\begin{pmatrix} -6 \\ 10-16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eigenvektor untuk $\lambda_2 = 4$:

$$\begin{pmatrix} -6 \\ 10-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Langkah 3: Tentukan Matriks V

$$V = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

- Langkah 4: Tentukan Matriks Σ

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- Langkah 5: Hitung AA^T

$$AA^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$$

Hasil Akhir

- Langkah 6: Tentukan Matriks U

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

- Maka, SVD dari matriks A adalah:

$$A = U\Sigma V^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Kesimpulan

- SVD memfaktorkan matriks A menjadi tiga komponen utama: matriks singular (U), nilai singular (Σ), dan vektor singular (V).
- Proses menyelesaikan SVD melibatkan perhitungan eigenvalue dan eigenvektor dari $A^T A$ dan AA^T.

Kesimpulan

- SVD memfaktorkan matriks A menjadi tiga komponen utama: matriks singular (U), nilai singular (Σ), dan vektor singular (V).
- Komponen-komponen ini memiliki aplikasi luas dalam kompresi data, pengenalan pola, dan analisis data.