Pertemuan Ke: 6 & 7

TRANSFORMASI FOURIER WAKTU DISKRIT

Retno Dwi Handayani, S.Kom.,M.T.I

SKO20420
PENGOLAHAN SINYAL DIGITAL

Transformasi Fourier

Tranformasi Fourier suatu fungsi: Spesifikasi amplitudo-amplitudo dan fase-fase sinusoidal yang jika dijumlahkan bersama menghasilkan fungsi baru

Tinjau fungsi $F(x)$, maka
Transformasi Fourier dari $F(x)$:

$$f(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) \exp(2\pi i \sigma x) dx$$

x, σ : pasangan variabel Fourier

Transformasi invers:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma) \exp(-2\pi i x \sigma) d\sigma$$

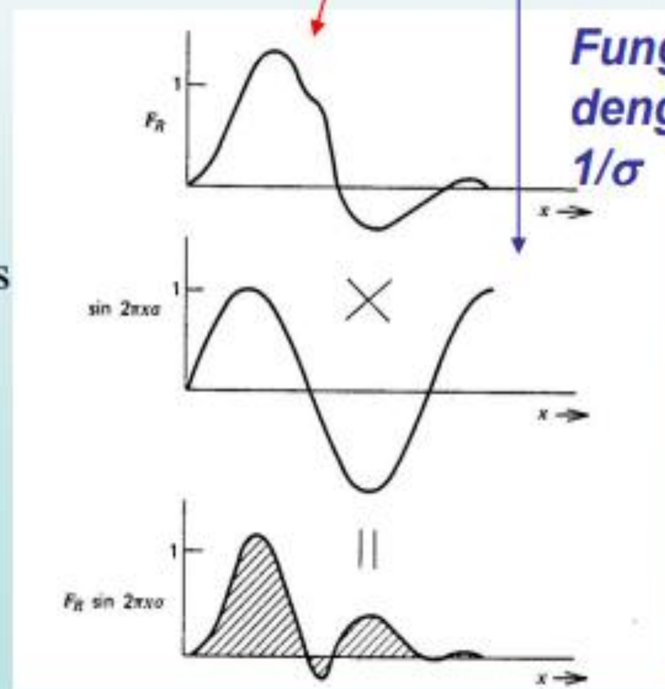
Rumus Euler untuk *F*(*x*): $\exp(ix) = \cos x + i \sin x$

sehingga $F(x) = F_R(x) + F_I(x)$

real *imajiner*

$$f(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} F_R(x)\cos 2\pi x\sigma dx + i\int_{-\infty}^{\infty} F_I(x)\cos 2\pi x\sigma dx + i\int_{-\infty}^{\infty} F_R(x)\sin 2\pi x\sigma dx - \int_{-\infty}^{\infty} F_I(x)\sin 2\pi x\sigma dx$$

$$f(\sigma) = f_R(\sigma) + f_I(\sigma) : \text{Fungsi kompleks}$$



Fungsi sinus dengan periode 1/σ

Representasi Sinyal Dalam Terminologi Komponen Frekuensi

Sebuah sinyal waktu kontinyu

$$x(t) = \sum_{n=1}^{N} A_n \cos(\omega_n t + \theta_n) \qquad -\infty < t < \infty$$

dimana:

N = bilangan integer positif

A_n = amplitudo sinyal sinusoida

ω_n = frekuensi sudut (dalam radiant/detik)

θ_n = fase sinyal sinusoida

Contoh 1:

Berikan gambaran sebuah sinyal sinusoida yang tersusun dari persamaan berikut ini:

$$x(t) = A_1 \cos t + A_2 \cos(4t + \pi/3) + A_3 \cos(8t + \pi/2) \qquad 0 < t < 20$$

Dari kasus ini gambarkan frekuensi penyusun dari sinyal tersebut.

Contoh 1:

Berikan gambaran sebuah sinyal sinusoida yang tersusun dari persamaan berikut ini:

$$x(t) = A_1 \cos t + A_2 \cos(4t + \pi/3) + A_3 \cos(8t + \pi/2) \qquad 0 < t < 20$$

Dari kasus ini gambarkan frekuensi penyusun dari sinyal tersebut.

Penyelesaian:

Dari persamaan tersebut di atas kita dapat melihat bahwa tiga parameter sinyal yang utama adalah:

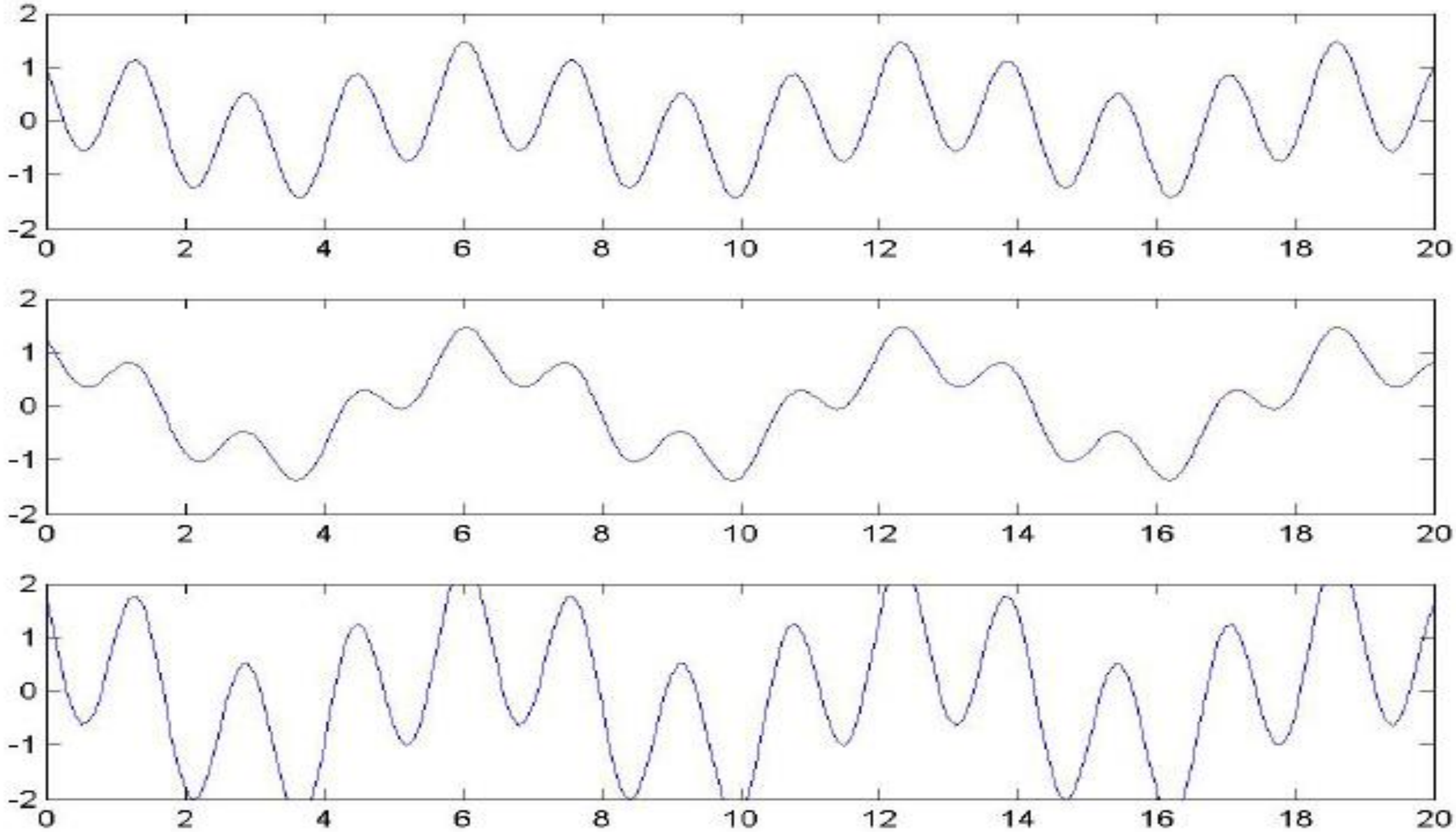
- Amplitudo adalah A_1, A_2 dan A_3.
- Frekuensi adalah 1, 4, dan 8 radiant.
- Fase adalah 0, $\pi/3$ dan $\pi/2$.

Dengan mencoba nilai-nilai amplitudo seperti berikut ini akan kita dapatkan bentuk sinyal yang berfariasi.

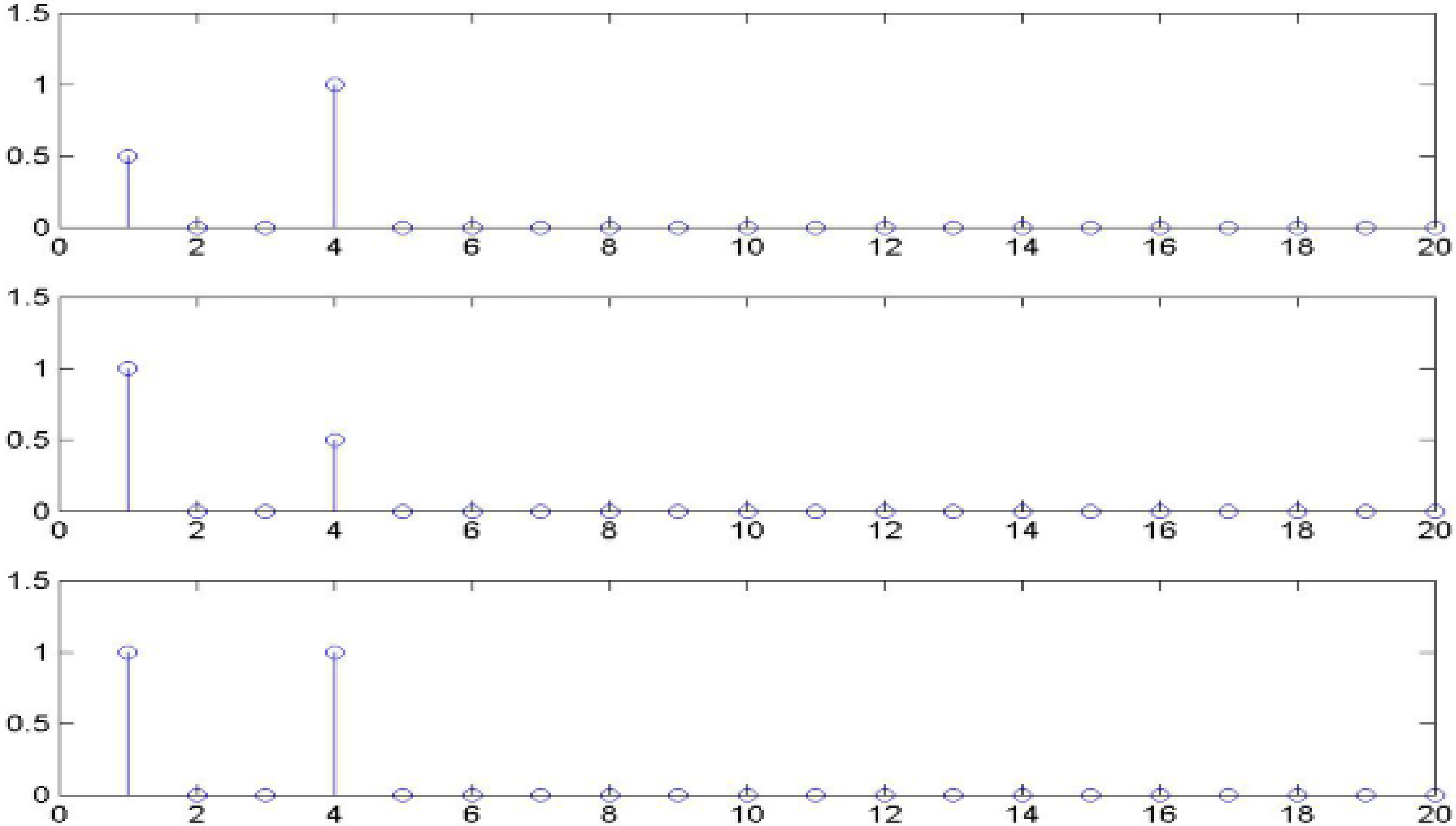
a) $A_1 = 0{,}5$ $A_2 = 1$ $A_3 = 0$

b) $A_1 = 1$ $A_2 = 0{,}5$ $A_3 = 0$

c) $A_1 = 1$ $A_2 = 1$ $A_3 = 0$



Gambaran nilai x(t) untuk berbagai nilai amplitudo berbeda



Gambar Spektral Amplitudo Sinyal Penyusun X(t)

Bentuk Eksponensial Komplek

$$A_n \cos(\omega_n t + \theta_n) = \frac{A_n}{2}\left[e^{j(\omega_n + \theta_n)} + e^{-j(\omega_n + \theta_n)}\right]$$

$$= \frac{A_n}{2} e^{j\theta_n} e^{j\omega_n t} + \frac{A_n}{2} e^{-j\theta_n} e^{j(-\omega_n)t}$$

Definisi: $c_n = \frac{A_n}{2} e^{j\theta} \quad n = 1, 2, \ldots \qquad c_{-n} = \frac{A_n}{2} e^{-j\theta} \quad n = 1, 2, \ldots$

$$A_n \cos(\omega_n t + \theta_n) = c_n e^{j\omega_n t} + c_{-n} e^{j(-\omega_n)t}$$

$$x(t) = \sum_{n=1}^{N}\left[c_n e^{j\omega_n t} + c_{-n} e^{j(-\omega_n)t}\right]$$

$$x(t) = \sum_{n=1}^{N} c_n e^{j\omega_n t} + \sum_{n=1}^{N} c_{-n} e^{j(-\omega_n)t}$$

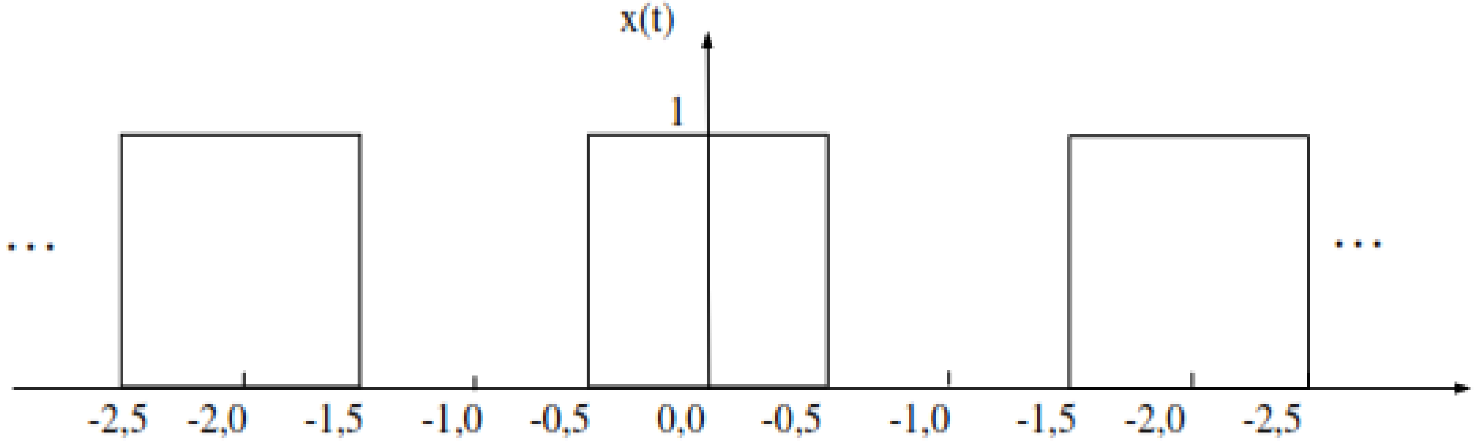
$$x(t) = \sum_{n=1}^{N} c_n e^{j\omega_n t} + \sum_{n=-N}^{-1} c_n e^{j(\omega_n)t}$$

$$x(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{j\omega_n t}$$

Representasi Deret Fourier Pada Sinyal Periodik

Sinyal waktu kontinyu x(t) dengan periode T

$x(t + T) = x(t)$ *untuk semua nilai t*



Gambar 4.3 Sinyal persegi periodik dengan T = 2

Bentuk Penjumlahan Eksponensial Komplek

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_o t} \qquad c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jn\omega_o t}\, dt \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2$$

Contoh 2:

Dari sinyal persegi periodik pada Gambar 4.3, coba anda cari nilai c_n.

Penyelesaian:

Sinyal ini merupakan periodik dengan periode T =2, dan frekuensi fundamentalnya adalah $\omega_0 = 2\pi/2 = \pi$ radian/detik. Sinyal ini memenuhi kondisi Derichlet, sehingga dapat diberikan representasi Fourier. Konstanta dapat dicari:

$$c_o = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x(t)dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1)dt = \frac{1}{2}$$

Untuk nilai n secara umum:

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x(t)e^{-jn\pi t}dt \\
&= \frac{1}{2}\int_{-0,5}^{0,5} e^{-jn\pi t}dt \\
&= -\frac{1}{j2n\pi}e^{-jn\pi t}\Big|_{t=-0,5}^{t=0,5} \\
&= -\frac{1}{j2n\pi}\left(-j\sin\frac{n\pi}{2} - j\sin\frac{n\pi}{2}\right) \\
&= \frac{1}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}, \qquad n = \pm 1, \pm 2, \ldots \\
&= \begin{cases} 0 & n = \pm 2, \pm 4, \ldots \\ \dfrac{1}{n\pi} & n = \pm 1, \pm 3, \ldots \end{cases}
\end{aligned}$$

Trigonometri Deret Fourier

Deret Fourier dalam bentuk trigonometri $x(t) = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n\,ganjil}}^{\infty} 2|c_n| \cos(n\omega_o t + \angle c_n) \quad -\infty < t < \infty$

dimana:

$|c_n|$ = magnitudo dari c_n

$\angle c_n$ = sudut dari c_n

Contoh 3:

Coba anda cari bantuk trigonometri deret Fourier pada Contoh.2.

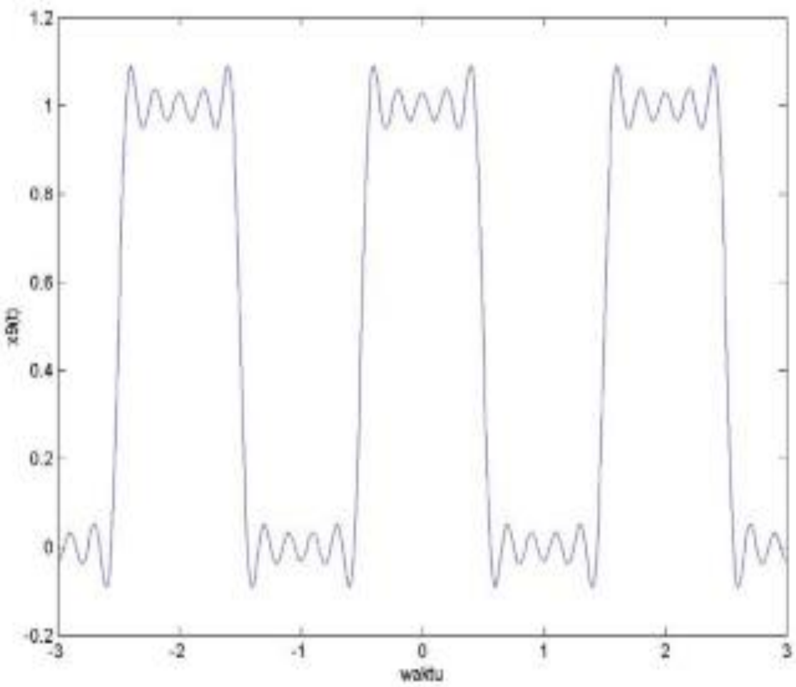
Penyelesaian:

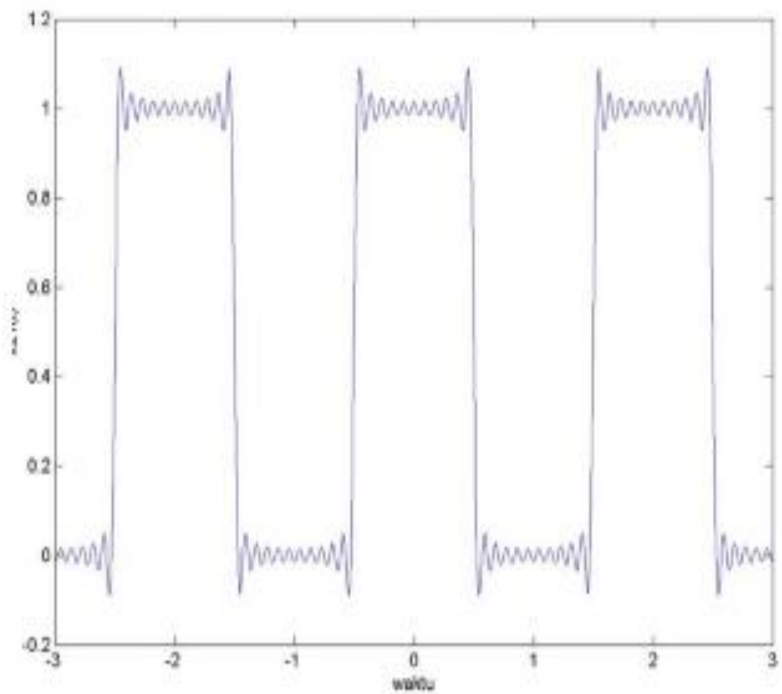
$$|c_n| = \begin{cases} 0 & untuk\ n = 2,4,\ldots \\ \dfrac{1}{n\pi} & untuk\ n = 1,3,\ldots \end{cases} \qquad \angle c_n = \begin{cases} 0 & untuk\ n = 2,4,\ldots \\ \left[(-1)^{(n-1)/2} - 1\right]\dfrac{\pi}{2} & untuk\ n = 1,3,\ldots \end{cases}$$

Representasi trigonometri dari Deret Fourier

$$x(t) = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n\ ganjil}}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \cos\left(n\pi t + \left[(-1)^{(n-1)/2} - 1\right]\frac{\pi}{2} \right) \qquad -\infty < t < \infty$$

$$x_N(t) = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n\ ganjil}}^{N} \frac{2}{n\pi} \cos\left(n\pi t + \left[(-1)^{(n-1)/2} - 1 \right] \frac{\pi}{2} \right) \qquad -\infty < t < \infty$$





SPEKTRAL GARIS

Komponen-komponen frekuensi disajikan dalam terminologi amplitudo dan fase
→gambar $|c_0|$ dan $2|c_n|$ sebagai fungsi $\omega = n\omega_0$ untuk $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Dalam spectral garis hanya frekuensi non negatif.

Contoh 4:
Pertimbangkan suatu pulsa persegi seperti pada Gambar 4.5, dalam hal ini $c_0=0{,}5$. Berikan koefisien-koefisien c_n pada deret Fourier-nya.

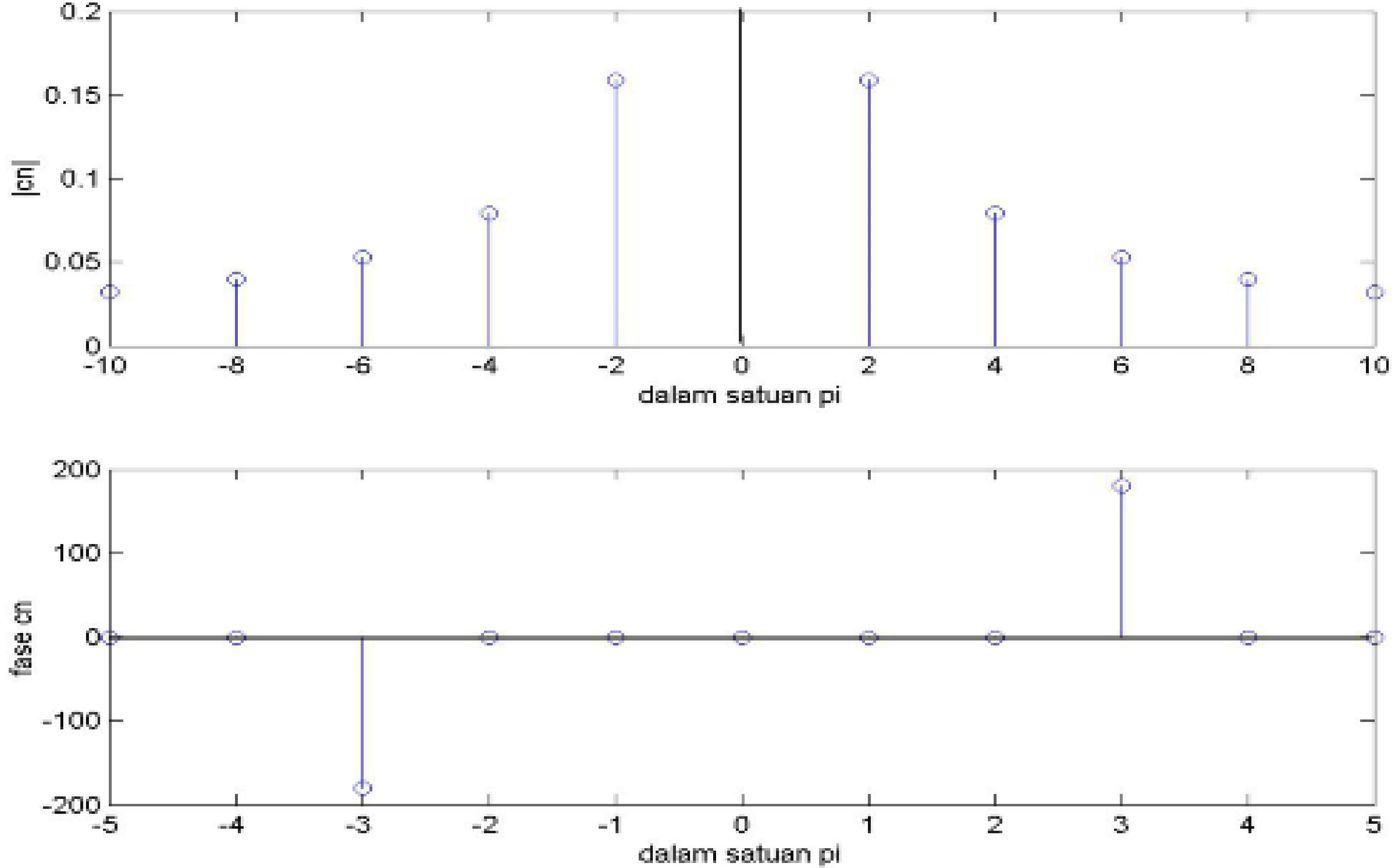
Penyelesaian:
Koefisien-koefisien c_n deret Fourier diberikan sebagai:

$$|c_n| = \begin{cases} 0 & n = 2, 4, \ldots \\ 1/n\pi & n = 1, 2, .. \end{cases} \qquad \angle c_n = \begin{cases} 0 & n = 2, 4, \ldots \\ [(-1)^{(n-1)/2} - 1]\dfrac{\pi}{2} & n = 1, 3, .. \end{cases}$$

Komponen-komponen frekuensi disajikan dalam terminologi amplitudo dan fase
→gambar $|c_0|$ dan $2|c_n|$ sebagai fungsi $\omega = n\omega_0$ untuk $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

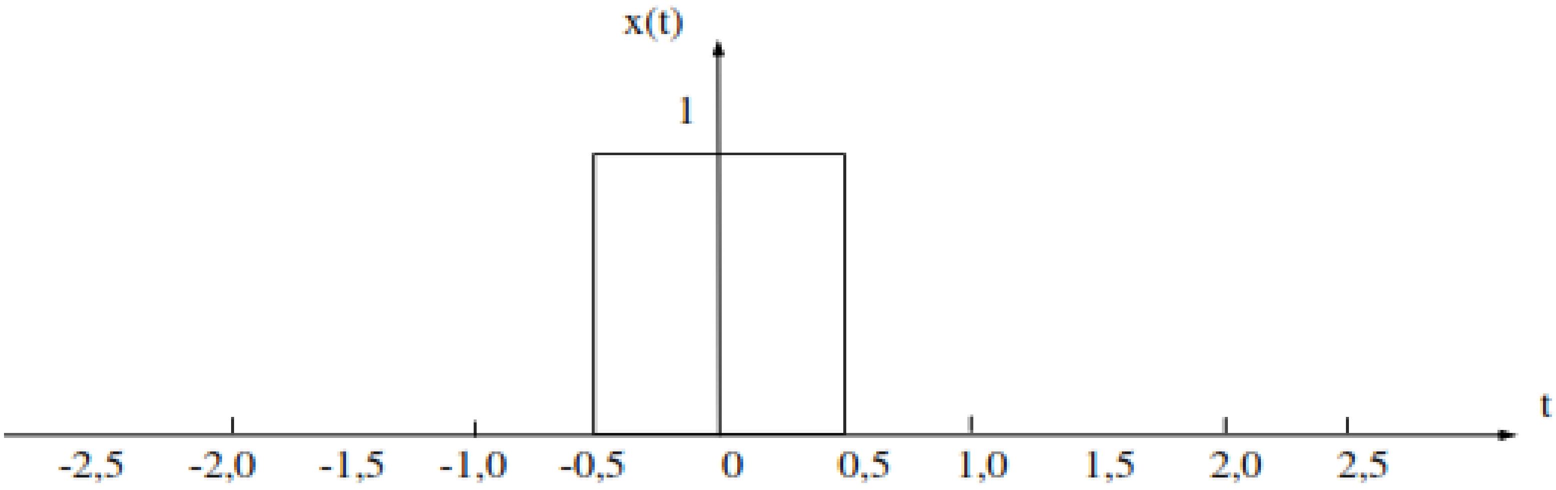
Dalam spectral garis hanya frekuensi non negatif.

Bentuk Spektrum Amplitudo dan Fasa



Transformasi Fourier

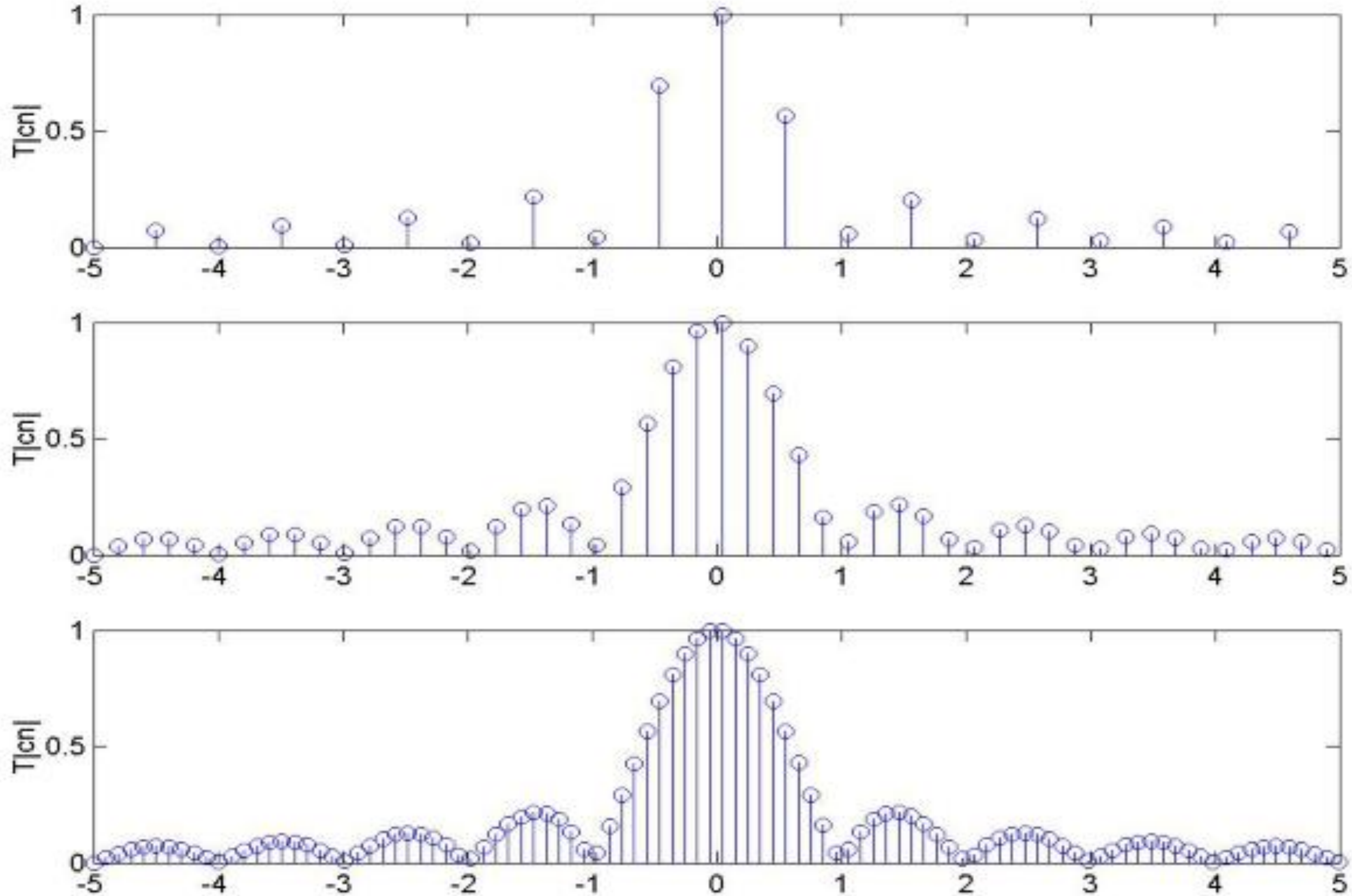
Deret fourier→ untuk sinyal periodik saja,
Transformasi Fourier→ sinyal periodik dan non periodik



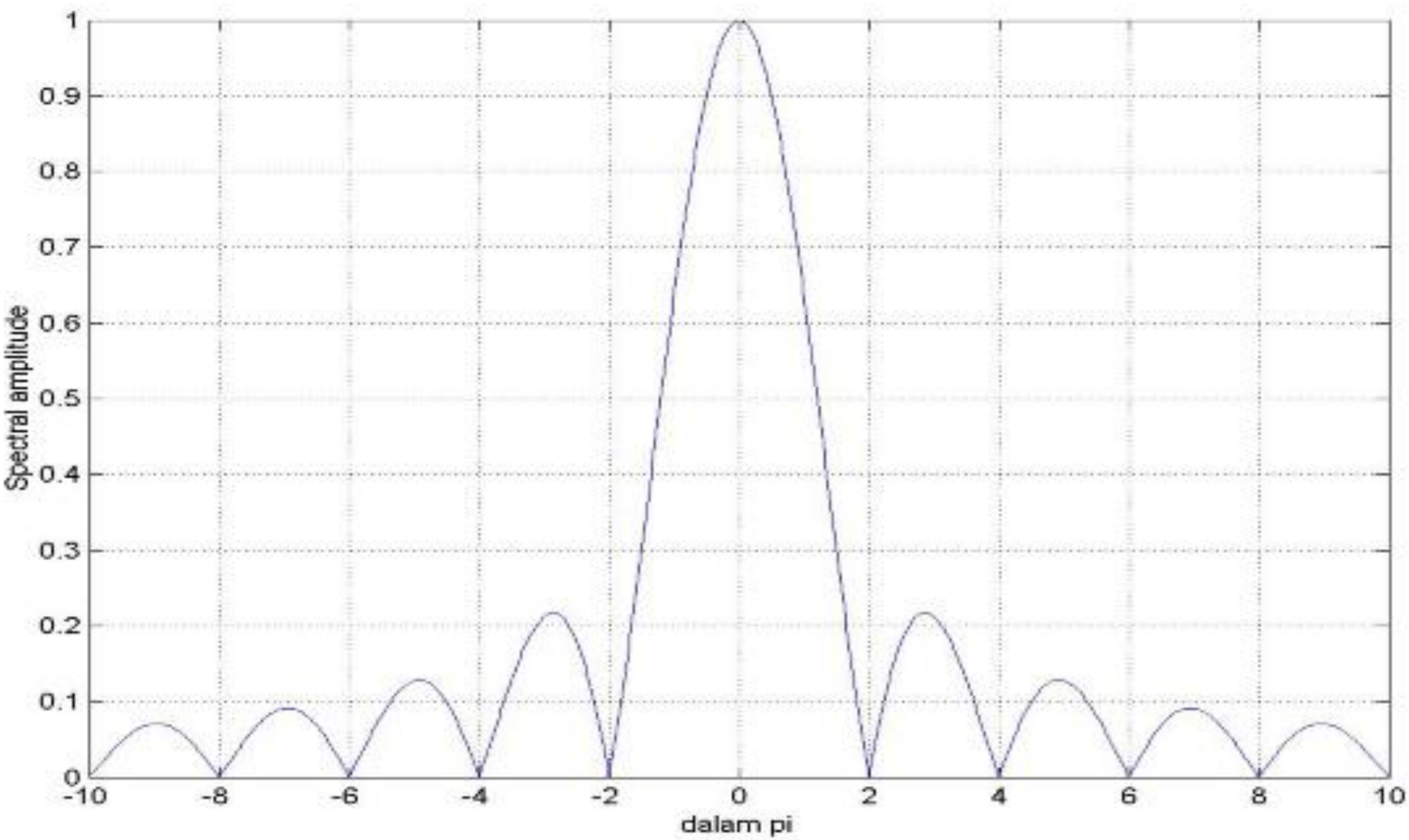
Gambar 4.7 Pulsa persegi satu detik

Evaluasi untuk n = 0 ⇒ $c_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)dt = \frac{1}{T}\int_{-0,5}^{0,5} dt = \frac{1}{T}$

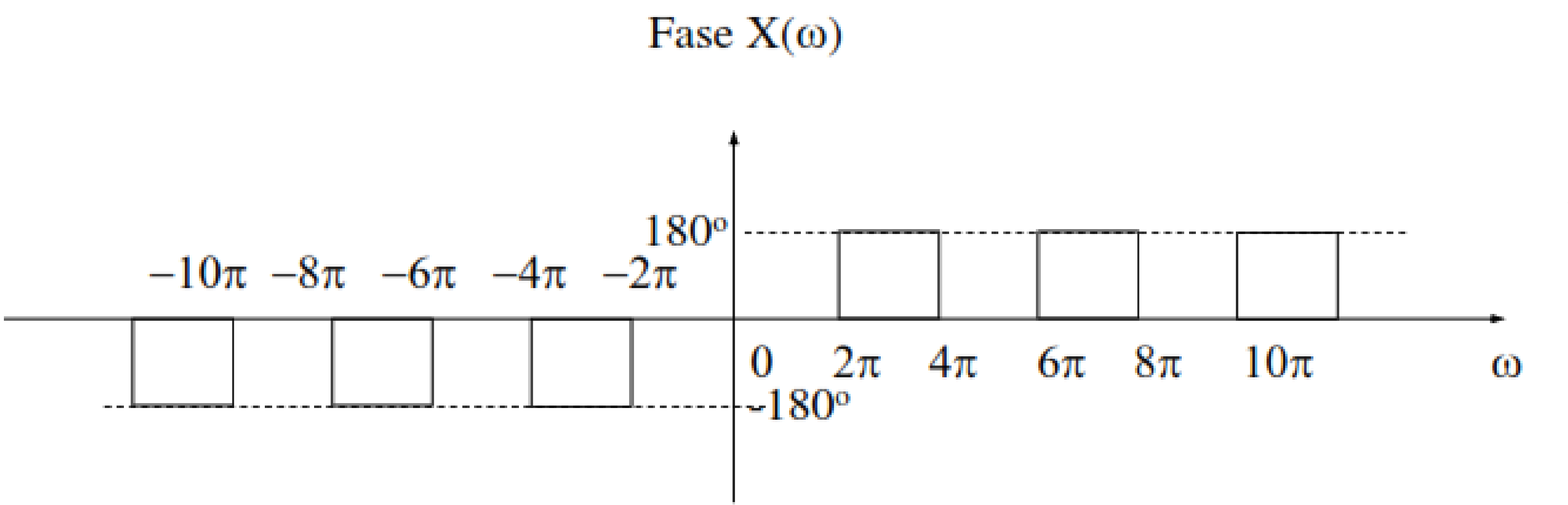
$$
\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{T}\int_{-0,5}^{0,5} e^{-jn\omega_0 t}\,dt \\
&= -\frac{1}{jn\omega_0 T}\Big[e^{-jn\omega_0 t}\Big]_{t=-0,5}^{t=0,5} \\
&= -\frac{1}{jn\omega_0 T}\Big[e^{-jn\omega_0/2} - e^{jn\omega_0/2}\Big] \\
&= -\frac{1}{jn\omega_0 T}\left(-j2\sin\frac{n\omega_0}{2}\right) \\
&= \frac{2}{n\omega_0 T}\sin\frac{n\omega_0 2}{2} \qquad ; n = \pm 1, \pm 2, ..
\end{aligned}
$$


T|cn|
1
0.5
0
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5

Gambar Spektrum dan Fasa Sinyal Persegi



Gambar Spektrum dan Fasa Sinyal Persegi



Sifat-sifat Transformasi Fourier

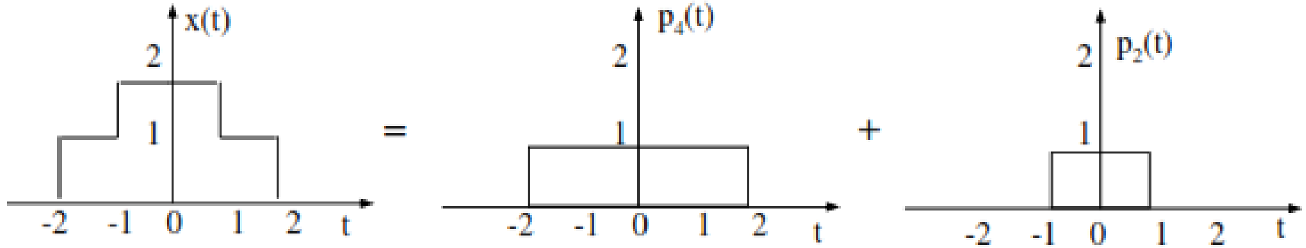
- **Linearitas**

Jika x(t) <- X(@) dan v(t)<- V(@)
maka: ax(t) +bx(t) <- aX(6) + bV(6)

Contoh 9:
Perhatikan sebuah sinyal pada Gambar 4.14, tampak bahwa sinyal tersebut merupakan jumlahan dari dua pulsa persegi seperti berikut ini:
x(t)=p,(+ p,(D)
Dengan memanfaatkan sifat linearitas coba anda berikan bentuk transformasi Fouriernya.

Penyelesaian:
Menggunakan sifat linearitas kita dapatkan bahwa tan Fourier masing-masing adalah seperti berikut:
P(c) = 4 sine 26/r
P,(6) = 2 sinc 26/

Maka kita dapatkan untuk
X(G) = P,(G) + P,(6)
= 4 sinc 26/ + 2 sine 2 6 /



- ## Pergeseran Waktu

Jika $x(t) \leftrightarrow X(\omega)$, maka untuk suatu nilai real c positif atau negatif:

$$x(t-c) \leftrightarrow X(\omega)e^{-j\omega c}$$

Sinyal x(t) yang ditunjukkan pada Gambar 4.15 memiliki ekuivalensi dengan pulsa persegi $p_2(t)$ yang mengalami pergeseran 1 detik. Dalam hal ini : $x(t) = p_2(t-1)$. Berikan bentuk transformasi Fouriernya

Penyelesaian:

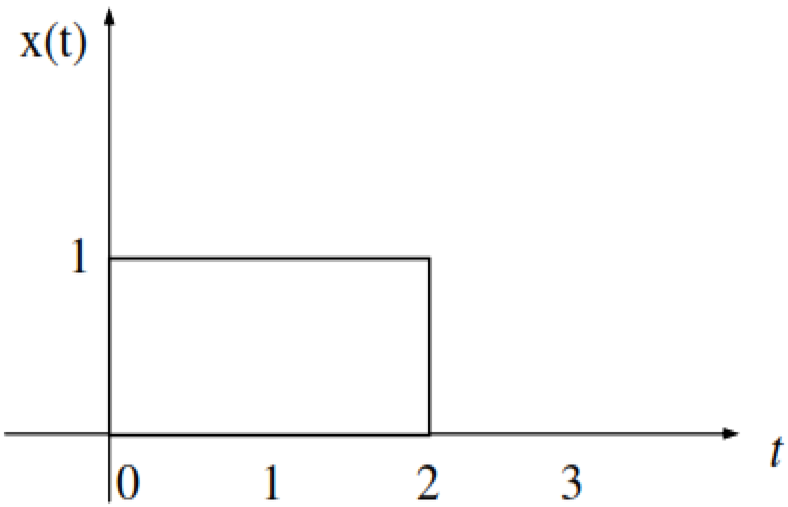
Transformasi Fourier $X(\omega)$ untuk sinyal x(t) hasilnya adalah:

$$X(\omega) = 2(\text{sinc } \omega/\pi)e^{-j\omega}.$$

Sementara kita tahu bahwa:

$$|e^{-j\omega}| = 1 \text{ untuk semua nilai } \omega$$

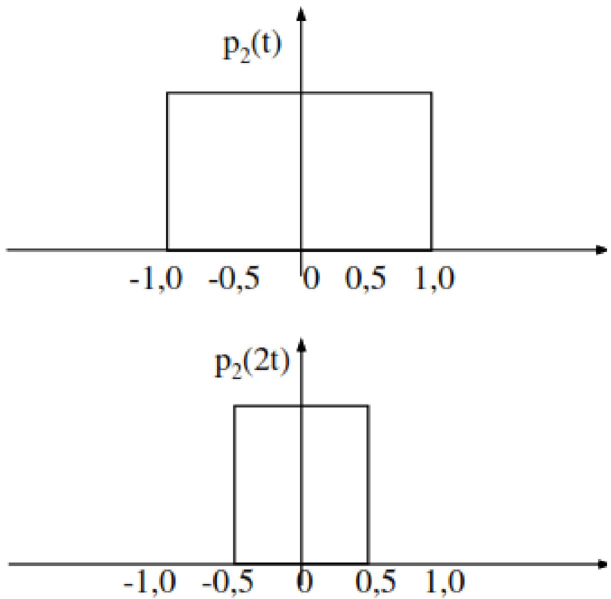
spektrum aplitudo $|X(\omega)|$ pada $x(t) = p_2(t-1)$ adalah sesuai dengan spektrum amplitudo pada $p_2(t)$.



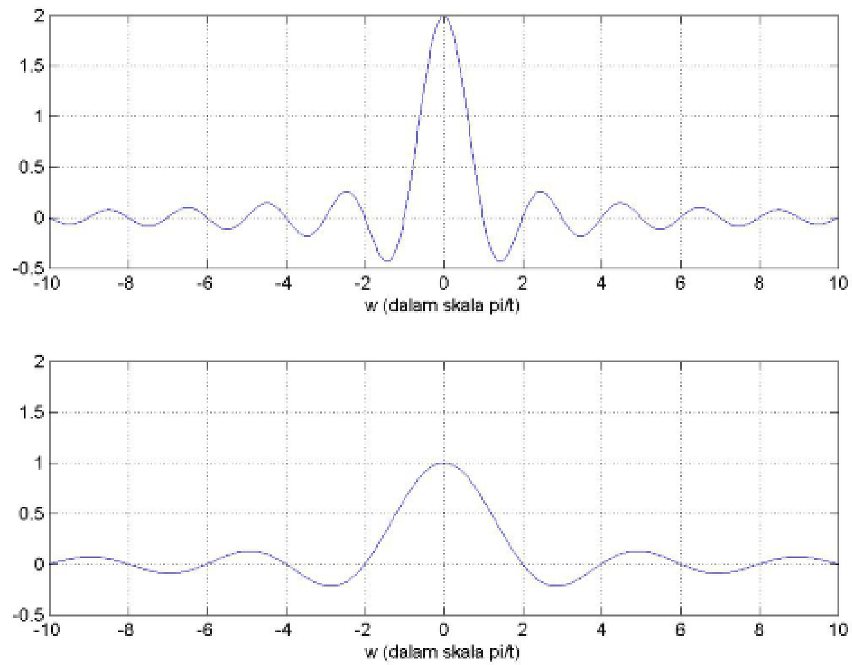
- # Penskalaan Waktu

Jika $x(t) \leftarrow\rightarrow X(\omega)$, untuk suatu nilai real positif a,

$$x(at) \leftarrow\rightarrow (1/a)X(\omega/a)$$



Gambar Contoh bentuk kompresi waktu pada suatu sinyal



Gambar Transformasi Fourier pada $p_2(t)$ dan $p_2(2t)$

- Pembalikan Waktu

Jika x(t) $\leftarrow\rightarrow$X(ω), maka akan kita miliki:

x(-t)$\leftarrow\rightarrow$X(-ω)

Jika sinyal x(t) bernilai real

$$X(-\omega)=\overline{X(\omega)}$$

Contoh

Suatu bilangan real b>0 diberikan untuk suatu sinyal sedemikian hingga x(-t) = e^{-bt}u(t). Berikan bentuk transformasi Fouriernya

$$x(t)=\begin{cases}0 & t>0\\ e^{bt} & t\leq 0\end{cases}$$

Penyelesaian:

Transformasi Fourier pada x(-t) adalah 1/(b + jω). Sehingga transformasi Fourier pada x(t) adalah:

$$X(\omega)=\frac{1}{\overline{\overline{b+j\omega}}}=\frac{1}{b-j\omega}$$

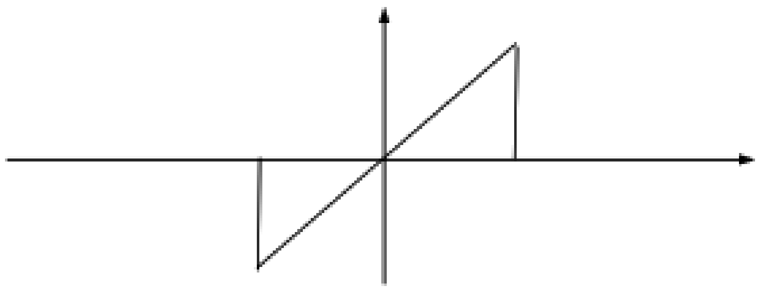
- Perkalian dengan Suatu Bentuk Pangkat

Jika x(t)←→X(ω), untuk suatu nilai positif integer n:

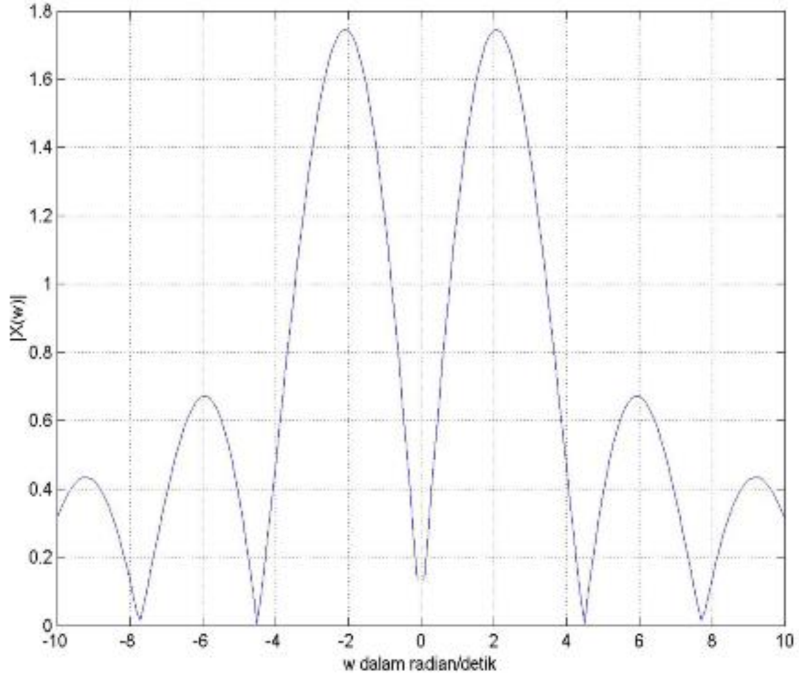
$$t^n x(t) \leftrightarrow (j)^n \frac{d^n}{d\omega^n} X(\omega)$$

Contoh

Tetapkan $x(t) = t\,p_2(t)$ yang diberikan pada Gambar 4.18 Berikan bentuk transformasi Fourier dan spektrum amplitudonya.



Gambar Sinyal $x(t) = tp_2(t)$



Gambar Spektrum amplitudo sinyal

Penyelesaian:

Dengan menggunakan sifat persamaan (4-52) dan pasangan transformasi Fourier (4-44) memberikan bentuk seperti berikut:

$$X(\omega) = j\frac{d}{d\omega}\left(2\operatorname{sinc}\frac{\omega}{\pi}\right) = j2\frac{d}{d\omega}\left(\frac{\sin\omega}{\omega}\right) = j2\frac{\omega\cos\omega - \sin\omega}{\omega^2}$$

SEKIAN.....
See You Next Meeting
Thank's

Retno Dwi Handayani

retnodh84@darmajaya.ac.id