INVERSE TRANSFORM Z DAN TRANSFER FUNCTION

9.1 Transformasi Z

Transformasi Z dalam sistem causal dinyatakan dengan persamaan:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

dimana *z* adalah variabel kompleks. Tabel 9.3 berisi beberapa sifat penting dari transformasi Z.

Tabel 9.3
Sifat Transformasi Z

Sifat	*x(n)*	*X(z)*
Linier	$A\,x_1(n) + B\,x_2(n)$	$A\,X_1(z) + B\,X_2(n)$
Konvolusi	$x(n) * h(n)$	$X(z)\,H(z)$
Time shift	$x(n-a)$	$X(z)\,z^{-a}$

Sifat-sifat di atas yang telah kita gunakan di Modul 7 ketika kita mengubah *H(z)* menjadi persamaan differensial. Transformasi Z dapat dihitung dengan persamaan di atas,

namun untuk memudahkan proses ini pada umumnya digunakan tabel pasangan transformasi Z seperti ditunjukkan pada Tabel 9.4.

Tabel 9.4
Pasangan Transformasi Z

x(n)	***X(z)***	***Daerah Konvergensi***
$\delta(n)$	1	$\|z\|>0$
$\delta(n-a)$	z^{-a}	$\|z\|>0$
$A\,u(n)$	$\frac{Az}{(z-1)}$	$\|z\|>1$
$n\,u(n)$	$\frac{z}{(z-1)^2}$	$\|z\|>1$
$n^2\,u(n)$	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$	$\|z\|>1$
$a^n\,u(n)$	$\frac{z}{(z-a)}$	$\|z\|>\|a\|$
$n\,a^n\,u(n)$	$\frac{a\,z}{(z-a)^2}$	$\|z\|>\|a\|$
$e^{-na}\,u(n)$	$\frac{z}{(z-e^{-a})}$	$\|z\|>e^{-a}$
$\sin(an)\,u(n)$	$\frac{z\sin(a)}{z^2-2z\cos(a)+1}$	$\|z\|>1$
$\cos(an)\,u(n)$	$\frac{z(z-\cos(a))}{z^2-2z\cos(a)+1}$	$\|z\|>1$

Transfer function, *H(z)*, dapat ditulis dalam beberapa format yaitu:

- Format polinomial

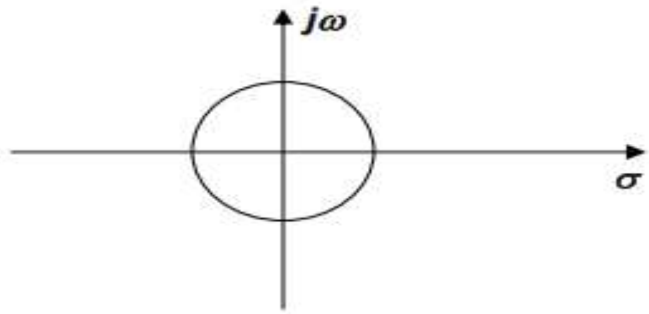
$$H(z)=\frac{b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+b_3z^{-3}+\ldots+b_Mz^{-M}}{a_0+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+a_3z^{-3}+\ldots+a_Nz^{-N}}$$

- Format pole-zero

$$H(z)=k\frac{(z-c_1)(z-c_2)\ldots}{(z-d_1)(z-d_2)\ldots}$$

Semua nilai z yang menyebabkan *H(z)* bernilai nol disebut ***'zero'*** sedangkan semua nilai z yang menyebabkan *H(z)* bernilai ∞ disebut ***'pole'***. Persamaan di atas memiliki zero pada $z = c_1$ dan $z = c_2$ dan memiliki pole pada $z = d_1$ dan $z = d_2$.

Pole dan zero dari suatu *transfer function* dapat digambarkan dalam bidang Z dimana pole digambarkan dengan '**x**' dan zero digambarkan dengan 'o'. Bidang Z digambarkan sebagai bidang kompleks dengan sebuah lingkaran berjari-jari satu berpusat di (0,0).



Gambar 9.1
Bidang Z

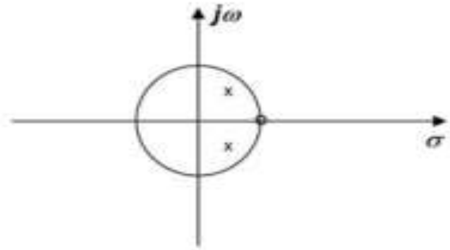
Selama semua pole dari suatu sistem terletak di dalam lingkaran tersebut maka sistem tersebut stabil. Misalnya suatu sistem dengan transfer function:

$$H(z) = \frac{(z-1)}{(z^2 - z + 0.5)}$$

bisa disederhanakan menjadi

$$H(z) = \frac{(z-1)}{(z - 0.5 + 0.5j)(z - 0.5 - 0.5j)}$$

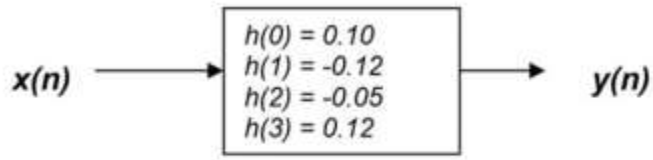
maka sistem ini memiliki zero pada $z = 1$, dan pole pada $z = 0.5 + 0.5j$ dan $z = 0.5 - 0.5j$ seperti pada Gambar 9.2. Sistem ini adalah sistem yang stabil.



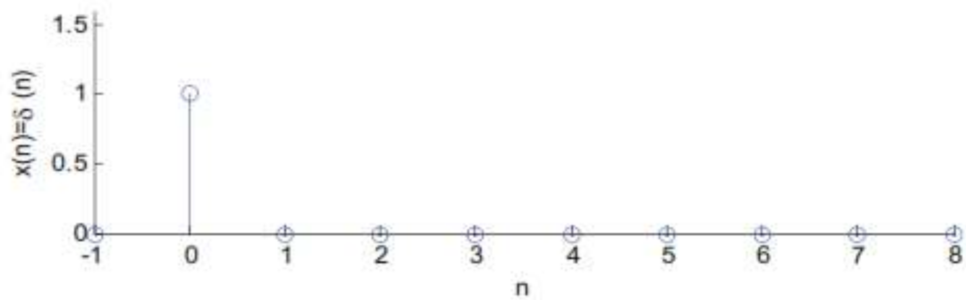
Gambar 9.2
Contoh pole dan zero

9.2 Menemukan Impulse Response

Misalnya kita memiliki suatu sistem seperti pada Gambar 9.3.



Gambar 9.3
Sistem dengan *h(n)*



Gambar 9.4
Sinyal input $x(n) = \delta(n)$

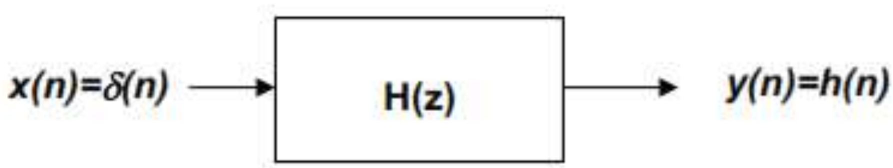
Jika input pada sistem ini adalah sinyal impulse $x(n) = \delta(n)$ seperti pada Gambar 9.4, maka outputnya adalah:

$$
\begin{aligned}
&y(0) = x(0)h(0) = 0.10 \\
&y(1) = x(1)h(0) \;\; + x(0)h(1) = -0.12 \\
&y(2) = x(2)h(0) \;\; + x(1)h(1) + x(0)h(2) = -0.05 \\
&y(3) = x(3)h(0) \;\; + x(2)h(1) + x(1)h(2) \;\; + x(0)h(3) = 0.12 \\
&y(4) = x(4)h(0) \;\; + x(3)h(1) + x(2)h(2) \;\; + x(1)h(3) = 0 \\
&y(5) = x(5)h(0) \;\; + x(4)h(1) + x(3)h(2) \;\; + x(2)h(3) = 0 \\
&y(6) = x(6)h(0) \;\; + x(5)h(1) + x(4)h(2) \;\; + x(3)h(3) = 0 \\
&y(7) = x(7)h(0) \;\; + x(6)h(1) + x(5)h(2) \;\; + x(4)h(3) = 0 \\
&y(8) = x(8)h(0) \;\; + x(7)h(1) + x(6)h(2) \;\; + x(5)h(3) = 0 \\
&\ldots
\end{aligned}
$$

Dari perhitungan ini dapat dilihat bahwa output, $y(n)$, tepat sama dengan $h(n)$ jika menerima input berupa sinyal inpulse. Dengan kata lain, kita dapat mengetahui impulse response, $h(n)$, dari suatu sistem dengan cara memberikan sinyal impulse sebagai inputnya. Inilah sebabnya mengapa $h(n)$ disebut *'impulse response'* karena itu merupakan respon sistem ketika diberi impulse.

Jadi jika kita memiliki sistem dalam bentuk $H(z)$ maka kita dapat menemukan $h(n)$ dari sistem tersebut dengan cara menemukan persamaan diferensialnya kemudian memberikan

$\delta(n)$ pada bagian inputnya seperti diilustrasikan pada Gambar 9.5.



Gambar 9.5
Respon sistem terhadap impulse

Cara lain untuk menemukan $h(n)$ dari sistem yang dinyataan dalam bentuk $H(z)$ adalah dengan menggunakan inverse Z-transform. Namun cara ini sangat matematis.

9.3 Menemukan Transfer Function

Kita dapat menggunakan transformasi Z untuk menemukan *H(z)* dari suatu sistem yang diketahui dalam bentuk *h(n)*. Ada dua cara yaitu dengan inverse Z-transform dari persamaan konvolusi dan inverse Z-transform dari persamaan *h(n)*.

Cara 1:

Output dari sistem seperti pada Gambar 9.3 dapat dihitung dengan konvolusi

$$y(n) = (0.10)\,x(n) + (-0.12)\,x(n-1) + (-0.05)\,x(n-2) + (0.12)\,x(n-3)$$

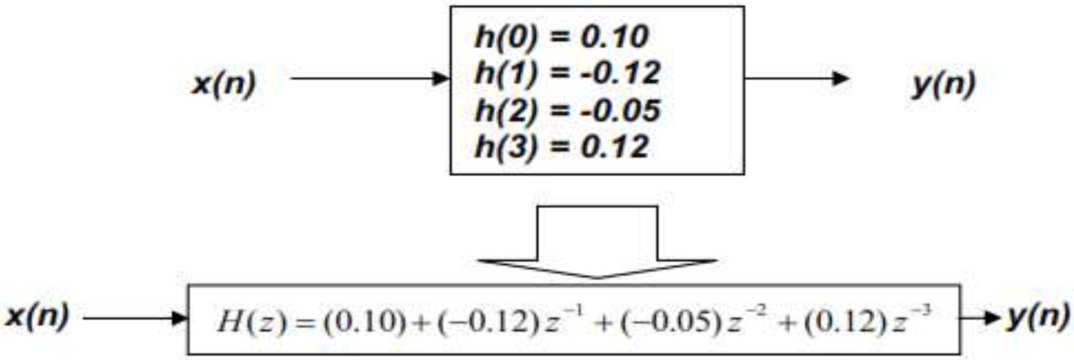
Jika persamaan ini ditransformasi dengan inverse Z-transform maka menjadi

$$Y(z) = (0.10)\,X(z) + (-0.12)\,X(z)\,z^{-1} + (-0.05)\,X(z)\,z^{-2} + (0.12)\,X(z)\,z^{-3}$$

$$Y(z) = X(z)\left[(0.10) + (-0.12)\,z^{-1} + (-0.05)\,z^{-2} + (0.12)\,z^{-3}\right]$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = (0.10) + (-0.12)\,z^{-1} + (-0.05)\,z^{-2} + (0.12)\,z^{-3}$$

maka $\quad H(z) = (0.10) + (-0.12)\,z^{-1} + (-0.05)\,z^{-2} + (0.12)\,z^{-3}$
seperti diilustrasikan pada Gambar 9.6.



Gambar 9.6
Transformasi *h(n)* menjadi *H(z)*

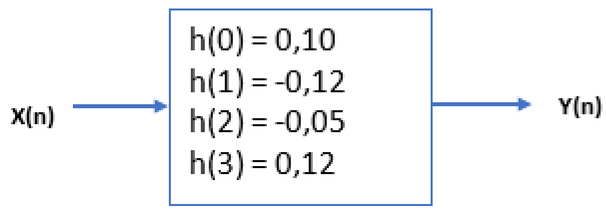
Cara 2:
Cara lain adalah dengan menulis persamaan *h(n)* dari Gambar 9.3

$$h(n) = (0.10)\,\delta(n) + (-0.12)\,\delta(n-1) + (-0.05)\,\delta(n-2) + (0.12)\,\delta(n-3)$$

kemudian mencari *H(z)* dengan transformasi Z seperti pada Tabel 9.4.

$$H(z) = (0.10) + (-0.12)\,z^{-1} + (-0.05)\,z^{-2} + (0.12)\,z^{-3}$$

Rangkuman :



Transfer Function

Y(n) = (0,10)X(n) + (-0,12) X(n-1) + (-0,05)X(n-2) + (0,12)X(n-3)

Inverse Z-Transform

Y(z)= (0,10)X(z) + (-0,12)X(z)z^{-1} + (-0,05)X(z)z^{-2} + (0,12)X(z)z^{-3}

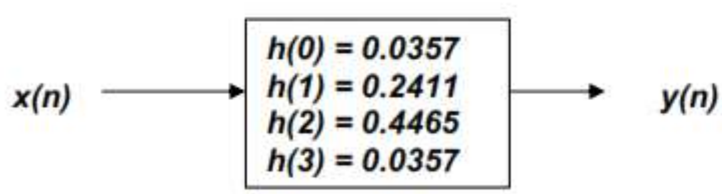
Y(z) = Xz [(0,10)+(-0,12) z^{-1} +(-0,05) z^{-2} +(0,12)X(z) z^{-3}]

$\frac{Y(z)}{X(z)}$= (0,10) + (-0,12) z^{-1} + (-0,05) z^{-2} + (0,12)X(z) z^{-3}

Maka → **H(z)= (0,10) + (-0,12) z^{-1} + (-0,05) z^{-2} + (0,12)X(z) z^{-3}**

SOAL LATIHAN

1. Sebuah sistem diskrit dinyatakan dalam bentuk impuse response seperti pada Gambar berikut ini.



   a. Temukanlah transfer function, *H(z)*, dari sistem tersebut.