

Sistem Persamaan Linear

Metode Operasi Baris Elementer

Pertemuan 1

Contoh

Penerapan Sistem Persamaan Linear

- Penentuan besarnya kuat arus dari setiap aliran listrik dalam suatu jaringan listrik
- Menentukan banyaknya arus lalu lintas pada setiap perempatan jalan yang sedang diamati
- Menyelesaikan model ekonomi pertukaran barang.

Sistem Persamaan Linear Secara Umum

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

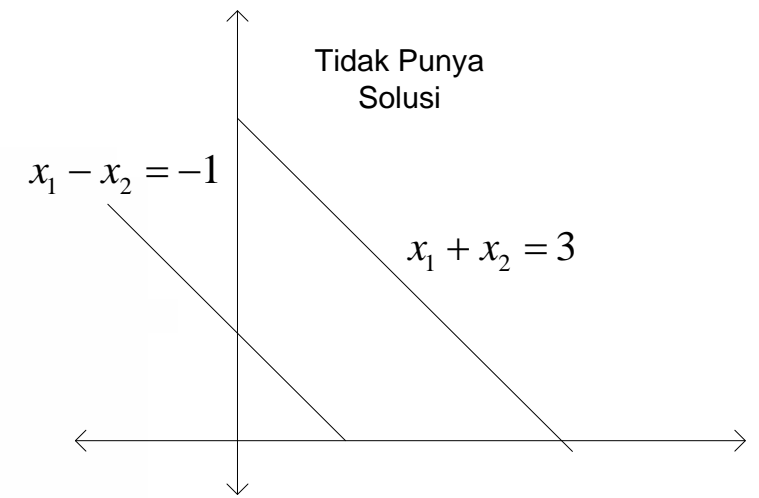
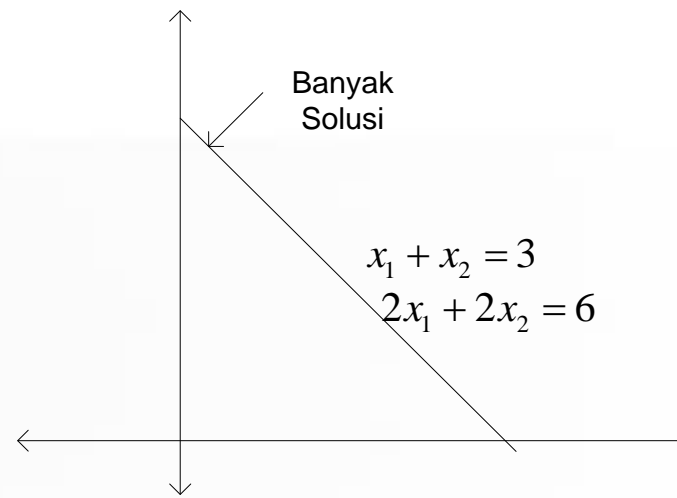
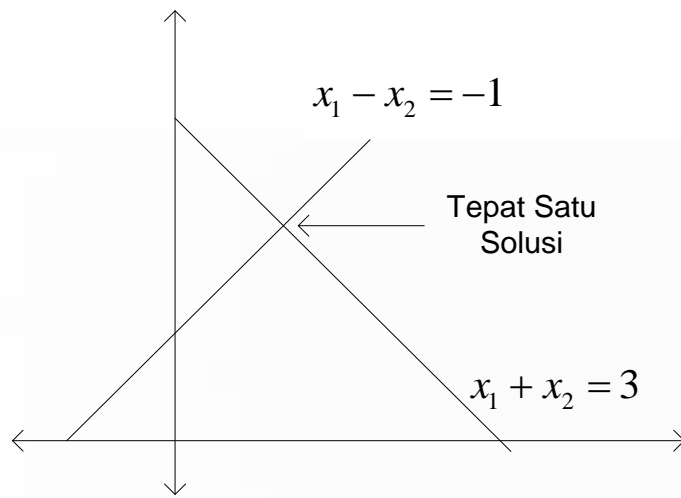
$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{(m-1)1} & a_{(m-1)2} & \dots & a_{(m-1)(n-1)} & a_{(m-1)n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{m(n-1)} & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{m-1} \\ b_m \end{bmatrix}$$

Kemungkinan Solusi dari SPL

- Tepat 1 solusi
- Jumlah solusi tak terhingga
- Tidak memiliki solusi



Representasi Geometri untuk 2
variable dan 2 persamaan

Sistem Persamaan Linear A nxn

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & \dots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix}$$

Substitusi Balik

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \quad x_1 = \frac{b_1 - (a_{12}x_2 + a_{13}x_3)}{a_{11}}$$

$$a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \quad x_2 = \frac{b_2 - a_{23}x_3}{a_{22}}$$

$$a_{33}x_3 = b_3 \quad x_3 = \frac{b_3}{a_{33}}$$

Substitusi Balik untuk A 4x4

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1$$

$$a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2$$

$$a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3$$

$$a_{44}x_4 = b_4$$

Metode Eliminasi Gauss

- Penyelesaian SPL dengan metode eliminasi Gauss

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix}$$

- Substitusi Balik

$$x_k = \frac{b_k - \sum_{j=k+1}^n a_{kj} x_j}{a_{kk}} \quad x_n = b_n / a_{nn} \quad k = n-1, n-2, \dots, 1 \text{ dan } a_{kk} \neq 0$$

Selesaikan SPL Berikut

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$x_1 + x_2 + 3x_4 = 4$$

$$-x_2 - x_3 + 5x_4 = -7$$

$$3x_3 + 13x_4 = 13$$

$$-13x_4 = -13$$

Operasi Baris Elementer

- a) Pertukaran baris
- b) Penskalaan baris (perkalian baris)
- c) Penjumlahan baris dengan kelipatan baris lain

Metode Eliminasi Gauss Naif : menggunakan hanya operasi c)

Metode Gauss yang diperbaiki : menggunakan langkah a),b),c)

Contoh

- Gunakan metode eliminasi Gauss naif untuk menyelesaikan SPL berikut :

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = 11$$

$$4x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 17$$

$$-2x_1 + 3x_2 - x_3 = -1$$

$$x_1 + x_2 + \quad \quad 3x_4 = 4$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1$$

$$3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = -3$$

$$-x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 4$$

- Kelemahan metode ini ?

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 2$$

$$3x_1 + 6x_2 = 9$$

$$2x_1 + 8x_2 + 4x_3 = 6$$

Metode Eliminasi Gauss yang diperbaiki

- Pivoting sebagian: Untuk menentukan Pivot pada baris ke k dan kolom ke p dipilih semua elemen pada kolom p yang mempunyai nilai mutlak terbesar, lalu pertukarkan baris tersebut.
- Penskalaan/menormalkan baris : membagi tiap baris dengan nilai mutlak terbesar ruas kiri.

Pivoting Sebagian

Cari $|x|$
terbesar, lalu
pertukarkan
barisnya
dengan baris
ke-2

$$\begin{pmatrix} x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \end{pmatrix}$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 2$$

$$3x_1 + 6x_2 = 9$$

$$2x_1 + 8x_2 + 4x_3 = 6$$

Latihan

- Selesaikan SPL berikut ini dengan menggunakan aturan pivoting

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 2$$

$$3x_1 + 6x_2 = 9$$

$$2x_1 + 8x_2 + 4x_3 = 6$$

Kemungkinan Solusi SPL

- Mempunyai solusi unik/tunggal $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & | & 1 \\ 3 & 1 & 2 & | & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & -3 & | & 3 \end{bmatrix}$
- Punya banyak solusi $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 4 \\ 2 & -1 & 1 & | & 2 \\ 1 & 2 & 3 & | & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 4 \\ 0 & -3 & -3 & | & -6 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$
- Tidak ada solusi sama sekali $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 4 \\ 2 & -1 & 1 & | & 2 \\ 1 & 2 & 3 & | & 7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 4 \\ 0 & -3 & -3 & | & -6 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{bmatrix}$