Aljabar Linear
Ekspansi Kofaktor

Egi Safitri, S.Mat., M.Si

Determinan Matriks dengan Ekspansi Kofaktor

Tujuan pembelajaran:

a) Mahasiswa mampu menghitung determinan menggunakan ekspansi kofaktor dan menyelesaiakn SPL

b) Mahasiswa mampu menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan determinan matriks

1

Ekspansi Kofaktor

Salah satu cara untuk menentukan determinan dari matriks persegi/bujur sangkar berordo $n \times n$

Determinan Menggunakan Ekspansi Kofaktor

Jika $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ adalah suatu matriks persegi berordo $n \times n$ maka

i. Minor dari elemen/entri a_{ij} atau minor$-ij$ (M_{ij}) yaitu **determinan matriks** yang diperoleh **setelah menghilangkan baris ke$-i$ dan kolom ke$-j$** matriks A.

ii. Kofaktor dari elemen/entri a_{ij} atau kofaktor $- ij$ (C_{ij}) yaitu $(-1)^{i+j}\ M_{ij}$

Contoh 1

Diberikan matriks persegi $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ maka tentukan C_{11} dan C_{32}

Penyelesaian

- **Untuk menentukan C_{11} artinya mencari kofactor dari a_{11}**

$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ *Ambil elemen a_{11}, hilangkan baris ke -1 dan kolom ke-1*

Minor dari elemen a_{11} adalah $M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

Kofaktor dari a_{11} adalah $C_{11} = (-1)^{1+1}\, M_{11} = (-1)^2 M_{11} = M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

$= a_{22}(a_{33}) - a_{32}(a_{23}) = a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}$

Lanjutan

Untuk menentukan C_{32} artinya mencari kofaktor dari a_{32}

$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ *Ambil elemen a32, hilangkan baris ke -3 dan kolom ke-2*

Minor dari elemen a_{32} adalah $M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$

Kofaktor dari a_{32} adalah $C_{32} = (-1)^{3+2}\, M_{32} = (-1)^5 M_{32} = -M_{32} =$

$- \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = -[a_{11}(a_{23}) - a_{21}(a_{13})] = -a_{11}a_{23} + a_{21}a_{13}$

Determinan Menggunakan Ekspansi Kofaktor

Secara umum, misalkan sebuah matriks persegi $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$

maka cara menghitung determinan matriks A dengan ekspansi kofaktor adalah sebagai berikut,

- Menghitung det (A) dengan ekspansi kofaktor sepanjang baris ke$-k$:

$$\det(A) = a_{k1}C_{k1} + a_{k2}C_{k2} + \cdots + a_{kn}C_{kn} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}C_{kj}$$

- Menghitung det (A) dengan ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke$-l$:

$$\det(A) = a_{1l}\,C_{1l} + a_{2l}\,C_{2l} + \cdots + a_{nl}\,C_{nl} = \sum_{i=1}^{n} a_{il}C_{il}$$

Catatan

Agar **perhitungannya lebih mudah** sebaiknya determinan diekspansikan ke baris atau ke kolom yang **memuat elemen-elemen bilangan nol sebanyak-banyaknya**.

Contoh 2

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & -1 \end{bmatrix}$. Tentukan determinan A melalui

a. Ekspansi baris kedua
b. Ekpansi kolom pertama

Penyelesaian

Matriks A berordo 3×3 $(\mathrm{n} = 3)$

a. Determinan A melalui ekspansi baris kedua $(k = 2)$

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{3} a_{2j}C_{2j} = a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22} + a_{23}C_{23}$$

$$= (-2)(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} + (0)(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} + (1)(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= (-2)(-1)^3\,[(2)(-1) - (5)(3)] + 0 + 1(-1)^5[(1(5) - 4(2)]$$

$$= (-2)(-1)[-2 - 15] + 1(-1)[5 - 8]$$

$$= 2(-17) + (-1)(-3) = -34 + 3 = -31$$

Contoh 2

b. Determinan A melalui ekspansi kolom pertama ($l = 1$)

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{3} a_{i1}C_{i1} = a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + a_{31}C_{31}$$

$$= (1)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} + (-2)(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} + (4)(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1)(-1)^{2}\,[(0)(-1) - (5)(1)] + (-2)(-1)^{3}[2(-1) - 5(3)]$$

$$+ 4(-1)^{4}[(2(1) - 0(3)]$$

$$= (1)(1)[0 - 5] + (-2)(-1)[-2 - 15] + 4(1)[2 - 0]$$

$$= -5 + 2(-17) + 8 = 3 + (-34) = -31$$

Catatan: Mencari determinan matriks menggunkan kofaktor sepanjang baris maupun sepanjang kolom manapun akan menghasilkan determinan yang sama. Seperti contoh 2 dengan melakukan ekspansi kofaktor sepanjang baris 2 dan kolom 1 menghasilkan determinanmatriks A adalah -31

Minor

Definisi minor adalah determinan submatriks persegi setelah salah satu baris dan kolomnya dihilangkan.

Minor dilambangkan dengan "M_{ij}" dimana "i" sebagai baris dan "j" sebagai kolom matriks yang dihilangkan.

Baris dan kolom dihilangkan bukan berarti dibuang, akan tetapi baris dan kolom tersebut hanya tidak diikutsertakan dalam submatriks yang baru.

Submatriks artinya bagian kecil dari matriks, sedangkan matriks persegi adalah matriks yang mempunyai jumlah baris sama dengan jumlah kolom atau sebut saja berordo nxn. Misalnya matriks persegi 3×3 maka submatriksnya berordo 2×2.

Jadi, menghitung minor matriks 3×3 adalah menghitung determinan submatriks 2×2.

Contoh: M_{12} = baris ke-1 dan kolom ke-2 dihilangkan

Matriks	Submatriks	Minor
$A_{3\times3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$	$M_{12} = \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{21} & \vdots & a_{23} \\ a_{31} & \vdots & a_{33} \end{bmatrix}$	$M_{12} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}$ $\lvert M_{12}\rvert = a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}$

Contoh: M_{23} = baris ke-2 dan kolom ke-3 dihilangkan

Matriks	Submatriks	Minor
$A_{3\times3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$	$M_{23} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \vdots \\ \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{31} & a_{32} & \vdots \end{bmatrix}$	$M_{23} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$ $\lvert M_{23}\rvert = a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}$

Kofaktor

Dalam kofaktor, elemen minor matriks dapat bernilai positif dan negatif. Kofaktor dilambangkan dengan "C_{ij}" dan dapat dihitung dengan rumus:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Kofaktor (C_{11})	Kofaktor (C_{12})	Kofaktor (C_{13})
$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11}$	$C_{12} = (-1)^{1+2} M_{12}$	$C_{13} = (-1)^{1+3} M_{13}$
$C_{11} = (-1)^{2} M_{11} = M_{11}$	$C_{12} = (-1)^{3} M_{12}$	$C_{13} = (-1)^{4} M_{13}$
	$C_{12} = (-1) M_{12} = -M_{12}$	$C_{13} = M_{13}$

Cara mudah untuk mengetahui nilai kofaktor, yaitu:

Jika i + j = bilangan genap maka kofaktor bernilai positif
Dan jika i + j = bilangan ganjil maka kofaktor bernilai negatif

Sebenarnya tanpa menghitung satu persatu kita bisa dengan mudah mengetahui tanda kofaktor matriks. Caranya cukup tuliskan tanda positif dan negatif secara bergantian di depan lambang minor.

$$C_{3\times 3} = \begin{bmatrix} M_{11} & -M_{12} & M_{13} \\ -M_{21} & M_{22} & -M_{23} \\ M_{31} & -M_{32} & M_{33} \end{bmatrix}$$

Ekspansi Baris

Rumus umum determinan ekspansi baris:

$$|A_{n\times n}| = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}$$

$$|A_{n\times n}| = a_{i1}(-1)^{i+1}M_{i1} + a_{i2}(-1)^{i+2}M_{i2} + \cdots + a_{in}(-1)^{i+n}M_{in}$$

$$|A_{n\times n}| = a_{i1}M_{i1} + a_{i2}M_{i2} + \cdots + a_{in}M_{in}$$

Ekspansi baris pertama

$$|A_{3\times 3}| = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}$$

$$|A_{3\times 3}| = a_{11}\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{12}\begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{13}\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

Ekspansi baris kedua

$$|A_{3\times3}| = -a_{21}M_{21} + a_{22}M_{22} - a_{23}M_{23}$$

$$|A_{3\times3}| = -a_{21}\begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{22}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{23}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

Ekspansi baris ketiga

$$|A_{3\times3}| = a_{31}M_{31} - a_{32}M_{32} + a_{33}M_{33}$$

$$|A_{3\times3}| = a_{31}\begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} - a_{32}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{bmatrix} + a_{33}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Contoh Soal: hitunglah determinan matriks berikut dengan cara ekspansi kofaktor!

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -5 \\ 1 & 3 & -7 \\ -1 & 4 & -8 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Ekspansi Baris Pertama

$$|A| = \begin{bmatrix} -2 & \cdots & \cdots \\ \vdots & 3 & -7 \\ \vdots & 4 & -8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cdots & 4 & \cdots \\ 1 & \vdots & -7 \\ -1 & \vdots & -8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & -5 \\ 1 & 3 & \vdots \\ -1 & 4 & \vdots \end{bmatrix}$$

$$|A| = -2\begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 4 & -8 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 1 & -7 \\ -1 & -8 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$|A| = -2[(3 \times -8) - (-7 \times 4)] - 4[(1 \times -8) - (-7 \times -1)] - 5[(1 \times 4) - (3 \times -1)]$$

$$|A| = -8 + 60 - 35 = 17$$

Satu Elemen Nol

Jika hanya ada satu elemen nol, perhitungan determinan bisa menggunakan rumus ekspansi baris atau kolom. Dengan syarat gunakanlah baris atau kolom yang berisi elemen nol.

Contoh soal:

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -5 \\ 0 & 3 & -7 \\ -1 & 4 & -8 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Ekspansi baris kedua

$$|B| = -\begin{bmatrix} \vdots & 4 & -5 \\ 0 & \cdots & \cdots \\ \vdots & 4 & -8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & \vdots & -5 \\ \cdots & 3 & \cdots \\ -1 & \vdots & -8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 4 & \vdots \\ \cdots & \cdots & -7 \\ -1 & 4 & \vdots \end{bmatrix}$$

$$|B| = -0\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 4 & -8 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} -2 & -5 \\ -1 & -8 \end{bmatrix} - (-7)\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$|B| = 0 + 3[(-2 \times -8) - (-5 \times -1)] + 7[(-2 \times 4) - (4 \times -1)]$$

$$|B| = 33 - 28 = 5$$

Dua Elemen Nol

Pertama, dua elemen nol dalam baris atau kolom berbeda, cara perhitungan determinan sama dengan cara satu elemen nol. Jadi, gunakan saja ekspansi baris seperti contoh diatas.

Kedua, dua elemen nol dalam baris yang sama.

Contoh soal:

$$C = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -5 \\ 1 & 3 & -7 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Ekspansi baris ketiga

$$|C| = \begin{bmatrix} \vdots & 4 & -5 \\ \vdots & 3 & -7 \\ 0 & \cdots & \cdots \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & \vdots & -5 \\ 1 & \vdots & -7 \\ \cdots & 4 & \cdots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 4 & \vdots \\ 1 & 3 & \vdots \\ \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$|C| = 0 \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 3 & -7 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 1 & -7 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$|C| = 0 - 4[(-2 \times -7) - (-5 \times 1)] + 0$$

$$|C| = -4(14 + 5) = -76$$

Tiga elemen nol

Pertama, tiga elemen nol dalam baris atau kolom berbeda, cara perhitungan determinan sama dengan cara satu elemen nol.

Kedua, dua elemen nol dalam baris yang sama, gunakan cara dua elemen nol.

Ketiga, tiga elemen nol dalam baris yang sama, maka nilai determinan = 0.

Contoh Soal: hitunglah determinan matriks berikut dengan cara ekspansi kofaktor!

$$D = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -8 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Ekspansi baris kedua

$$|D| = -\begin{bmatrix} \vdots & 4 & -5 \\ 0 & \cdots & \cdots \\ \vdots & 4 & -8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & \vdots & -5 \\ \cdots & 0 & \cdots \\ -1 & \vdots & -8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 4 & \vdots \\ \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 4 & \vdots \end{bmatrix}$$

$$|D| = -0\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 4 & -8 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} -2 & -5 \\ -1 & -8 \end{bmatrix} - 0\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$|D| = 0$$

Ekspansi Kolom

Ekspansi kolom diawali dari setiap elemen baris pertama atau elemen dengan nilai i = 1 (a_{1j}) dan arahnya bergerak menurun sepanjang jumlah baris matriks.

Rumus umum determinan ekspansi kolom:

$$|A_{n\times n}| = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}$$

$$|A_{n\times n}| = a_{1j}(-1)^{1+j}M_{1j} + a_{2j}(-1)^{2+j}M_{2j} + \cdots + a_{nj}(-1)^{n+j}M_{nj}$$

$$|A_{n\times n}| = a_{1j}M_{1j} + a_{2j}M_{2j} + \cdots + a_{nj}M_{nj}$$

Kemudian tiga rumus determinan ekspansi kolom matriks 3×3, yaitu:

Ekspansi kolom pertama

$$|A_{3\times3}| = a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + a_{31}M_{31}$$

$$|A_{3\times3}| = a_{11}\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{21}\begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{31}\begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Ekspansi kolom kedua

$$|A_{3\times3}| = -a_{12}M_{12} + a_{22}M_{22} - a_{32}M_{32}$$

$$|A_{3\times3}| = -a_{12}\begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{22}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{32}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Ekspansi kolom ketiga

$$|A_{3\times3}| = a_{13}M_{13} - a_{23}M_{23} + a_{33}M_{33}$$

$$|A_{3\times3}| = a_{13}\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} - a_{23}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} + a_{33}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Contoh Soal: hitunglah determinan matriks berikut dengan cara ekspansi kofaktor!

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -5 \\ 1 & 3 & -7 \\ -1 & 4 & -8 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Ekspansi kolom pertama

$$|A| = \begin{bmatrix} -2 & \cdots & \cdots \\ \vdots & 3 & -7 \\ \vdots & 4 & -8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \vdots & 4 & -5 \\ 1 & \cdots & \cdots \\ \vdots & 4 & -8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vdots & 4 & -5 \\ \vdots & 3 & -7 \\ -1 & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

$$|A| = -2 \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 4 & -8 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 4 & -8 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 3 & -7 \end{bmatrix}$$

$$|A| = -2[(3 \times -8) - (-7 \times 4)] - 1[(4 \times -8) - (-5 \times 4)] - 1[(4 \times -7) - (-5 \times 3)]$$

$$|A| = -8 + 12 + 13 = 17$$

Satu Elemen Nol

Jika hanya ada satu elemen nol, bisa menggunakan rumus ekspansi baris atau kolom.

Contoh soal:

$$E = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -5 \\ 1 & 3 & -7 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Ekspansi kolom ketiga

$$|E| = \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & -5 \\ 1 & 3 & \vdots \\ -1 & 4 & \vdots \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 4 & \vdots \\ \cdots & \cdots & -7 \\ -1 & 4 & \vdots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 4 & \vdots \\ 1 & 3 & \vdots \\ \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$|E| = -5 \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} - (-7) \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$|E| = -5[(1 \times 4) - (3 \times -1)] + 7[(-2 \times 4) - (4 \times -1)] + 0$$

$$|E| = -35 - 28 = -63$$

Dua elemen nol

Pertama, dua elemen nol dalam dua baris atau kolom berbeda, cara perhitungan determinan sama dengan cara satu elemen nol. Jadi, gunakan saja ekspansi baris atau kolom seperti contoh diatas.

Kedua, dua elemen nol dalam kolom yang sama.

Contoh soal:

$$F = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & -7 \\ -1 & 4 & -8 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Ekspansi Kolom Kedua

$$|F| = - \begin{bmatrix} \cdots & 0 & \cdots \\ 1 & \vdots & -7 \\ -1 & \vdots & -8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & \vdots & -5 \\ \cdots & 0 & \cdots \\ -1 & \vdots & -8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & \vdots & -5 \\ 1 & \vdots & -7 \\ \cdots & 4 & \cdots \end{bmatrix}$$

$$|F| = -0 \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ -1 & -8 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ -1 & -8 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 1 & -7 \end{bmatrix}$$

$$|F| = 0 + 0 - 4[(-2 \times -7) - (-5 \times 1)]$$

$$|F| = -4(14 - (-5)) = -76$$

Tiga elemen nol

Caranya hampir sama dengan tiga elemen nol yang dibahas sebelumnya.

Pertama, tiga elemen nol dalam tiga baris atau kolom berbeda, maka hitung dengan cara satu elemen nol.

Kedua, dari tiga elemen nol, dua diantaranya dalam kolom yang sama. Maka, caranya seperti dua elemen nol.

Ketiga, jika tiga elemen nol dalam satu kolom, maka nilai determinan = 0.

Contoh Soal: hitunglah determinan matriks berikut dengan cara ekspansi kofaktor!

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -5 \\ 0 & 3 & -7 \\ 0 & 4 & -8 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Ekspansi kolom pertama

$$|G| = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots \\ \vdots & 3 & -7 \\ \vdots & 4 & -8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \vdots & 4 & -5 \\ 0 & \cdots & \cdots \\ \vdots & 4 & -8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vdots & 4 & -5 \\ \vdots & 3 & -7 \\ 0 & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

$$|G| = 0 \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 4 & -8 \end{bmatrix} - 0 \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 4 & -8 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 3 & -7 \end{bmatrix}$$

$$|G| = 0$$