Aljabar Linear
Aturan Crammer

Egi Safitri, S.Mat., M.Si

Aturan Crammer

Salah satu cara untuk menyelesaikan/ mencari solusi sistem persamaan linear.

Aturan Cramer

Aturan Cramer ditemukan oleh ahli matematika Gabriel Cramer pada tahun 1750-an. Aturan ini digunakan untuk mencari solusi suatu sistem persamaan dengan sejumlah variabel dan jumlah persamaan yang sama. Terkadang, saat kita menyelesaikan sistem persamaan 3 variabel, misalnya x, y, dan z, kita mungkin perlu menyelesaikan dua variabel x dan y untuk menyelesaikan variabel z. Namun dengan menggunakan aturan Cramer, kita dapat mencari nilai variabel apa pun tanpa mencari nilai variabel lainnya.

Apa Aturan Cramer?

Aturan Cramer adalah salah satu metode yang digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan. Aturan ini melibatkan determinan . yaitu, nilai-nilai variabel dalam sistem ditemukan dengan bantuan determinan. Mari kita perhatikan sistem persamaan n variabel x_1, x_2, x_3, ..., x_n yang ditulis dalam bentuk matriks AX = B, dimana

- A = matriks koefisien yang merupakan matriks persegi
- X = matriks kolom dengan variabel
- B = matriks kolom dengan konstanta (yang berada di sisi kanan persamaan)

Rumus Aturan Cramer

Berikut rumus aturan Cramer untuk menyelesaikan sistem AX = B (atau) mencari nilai variabel $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$. Untuk menyelesaikan sistem persamaan :

- Temukan itu |A| dan diwakili oleh D.
- Carilah determinan $D_{x1}, D_{x2}, D_{x3}, \ldots, D_{xn}$, dimana D_{xi} adalah determinan matriks A dimana kolom ke i digantikan oleh matriks kolom B.
- Kami membagi masing-masing determinan ini dengan D untuk mencari nilai variabel yang bersesuaian. yaitu, $x_1 = D_{x1}/D$, $x_2 = D_{x2}/D$, …., $x_n = D_{xn}/D$.

Perhatikan bahwa sistem persamaan memiliki solusi unik hanya jika $D \neq 0$.

Cramer's Rule

To find the solution of the system $Ax = B$

- Find the following determinants.

  $$D = |A|, Dx_1, Dx_2, \ldots, Dx_n$$

  Where Dx_i is the same determinant as D where i^{th} column is replaced with B.

- Apply,

  $$X_1 = \frac{Dx_1}{D} \; ; \; X_2 = \frac{Dx_2}{D} \; ; \ldots\ldots\ldots ; \; X_n = \frac{Dx_1}{D}$$

  (Where $D \neq 0$)

Aturan Cramer Untuk 2 x 2

Dengan menggunakan rumus di atas, mari kita lihat cara menyelesaikan sistem 2 persamaan 2 variabel menggunakan aturan Cramer. Berikut langkah-langkah menyelesaikan sistem persamaan 2x2 pada dua bilangan tak diketahui x dan y menggunakan aturan Cramer.

- **Langkah-1:** Tulis sistem ini dalam bentuk matriks AX = B.
- **Langkah-2:** Cari D yang merupakan determinan dari A. Cari juga determinan D_x dan D_y dimana

  D_x = det (A) dimana kolom pertama diganti dengan B

  D_y = det (A) dimana kolom kedua diganti dengan B
- **Langkah-3:** Temukan nilai variabel x dan y dengan membagi masing-masing D_x dan D_y dengan D.

Pertimbangkan sistem dua persamaan dalam dua variabel x dan y.

$a_1x + b_1y = c_1$ dan

$a_2x + b_2y = c_2$

Mari kita terapkan langkah-langkah di atas untuk menyelesaikan sistem di atas.

Langkah-1: Tulis sistem ini dalam bentuk matriks AX = B, dimana

- SEBUAH = $\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{bmatrix}$ = matriks koefisien
- X = $\begin{bmatrix} \text{X} \\ \text{kamu} \end{bmatrix}$ = matriks variabel
- B = $\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$ = matriks konstanta

Langkah-2: Hitung determinan D, D_x, dan D_y, di mana

- $D = \det(A) = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$
- $D_x = \det(A)$ dimana kolom pertama diganti dengan $B = \begin{vmatrix} C_1 & B_1 \\ C_2 & B_2 \end{vmatrix}$
- $D_y = \det(A)$ dimana kolom kedua diganti dengan $B = \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}$

Langkah-3: Temukan x dan y (bila $D \neq 0$) menggunakan

- $x = D_x/D$
- $y = D_y/D$

Aturan Cramer Untuk 3 x 3

Kami hanya akan memperluas proses aturan Cramer yang sama untuk 2 persamaan untuk sistem persamaan 3x3 juga. Berikut langkah-langkah menyelesaikan sistem persamaan 3x3 tiga variabel x, y, dan z dengan menerapkan aturan Cramer.

- **Langkah-1:** Tulis sistem ini dalam bentuk matriks AX = B.
- **Langkah-2:** Carilah D yang merupakan determinan dari A. yaitu D = det (A). Cari juga determinan D_x, D_y, dan D_z dimana
  D_x = det (A) dimana kolom pertama diganti dengan B
  D_y = det (A) dimana kolom kedua diganti dengan B
  D_z = det (A) dimana kolom ketiga diganti dengan B
- **Langkah-3:** Temukan nilai variabel x, y, dan z dengan membagi masing-masing D_x, D_y, dan D_z dengan D.

Pertimbangkan sistem tiga persamaan dalam tiga variabel x, y, dan z.

$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$

$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$ dan

$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$

Mari kita terapkan langkah-langkah di atas untuk menyelesaikan persamaan 3x3.

Langkah-1: Kita akan menulis sistem dalam bentuk matriks AX = B,

dimana

- SEBUAH = $\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{bmatrix}$ = matriks koefisien
- X = $\begin{bmatrix} X \\ \text{kamu} \\ z \end{bmatrix}$ = matriks variabel
- B = $\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix}$ = matriks konstanta

Langkah-2: Hitung determinan D, D_x, D_y, dan D_z di mana

- D = det (A) = $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$
- D_x = det (A) dimana kolom pertama diganti dengan B = $\begin{vmatrix} D_1 & B_1 & C_1 \\ D_2 & B_2 & C_2 \\ D_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$
- D_y = det (A) dimana kolom kedua diganti dengan B = $\begin{vmatrix} A_1 & D_1 & C_1 \\ A_2 & D_2 & C_2 \\ A_3 & D_3 & C_3 \end{vmatrix}$
- D_z = det (A) dimana kolom ketiga diganti dengan B = $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & D_3 \end{vmatrix}$

Langkah-3: Temukan nilai variabel x, y, dan z (jika $D \neq 0$) menggunakan

- $x = D_x / D$
- $y = D_y / D$
- $z = D_z / D$

Bagan Aturan Cramer

Jika kita mengamati rumus aturan Cramer pada ketiga bagian di atas, kita telah menyebutkan bahwa $D \neq 0$ di mana-mana. Hal ini karena saat mencari nilai variabel, D ada di penyebutnya dan jika $D = 0$, pecahan (nilai variabel) menjadi tidak terdefinisi. Jadi aturan ini hanya berlaku jika $D \neq 0$. Namun bagaimana dengan sistem persamaan jika $D = 0$? Lalu ada dua kemungkinan.

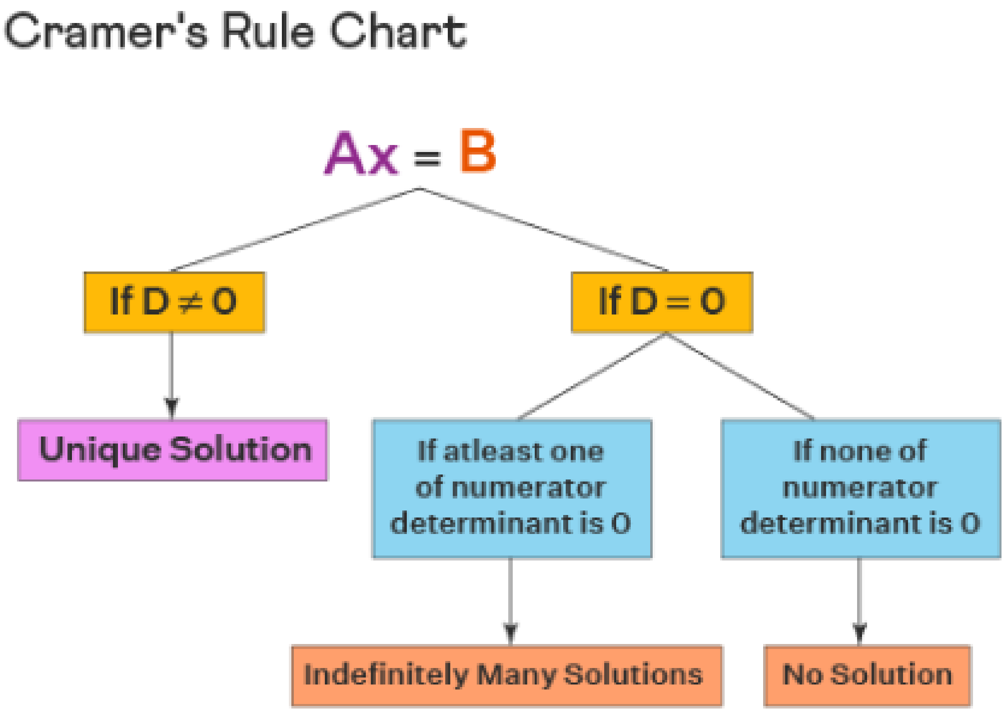
- Sistem mungkin tidak memiliki solusi .
- Sistem mungkin mempunyai solusi yang jumlahnya tak terhingga.

Meskipun aturan Cramer tidak membantu dalam mencari solusi yang jumlahnya tak terhingga, kita dapat menentukan apakah sistem tersebut "tidak memiliki solusi" atau "jumlah solusi tak terhingga" menggunakan determinan yang kita hitung sebagai proses penerapan aturan tersebut.

Meskipun aturan Cramer tidak membantu dalam mencari solusi yang jumlahnya tak terhingga, kita dapat menentukan apakah sistem tersebut "tidak memiliki solusi" atau "jumlah solusi tak terhingga" menggunakan determinan yang kita hitung sebagai proses penerapan aturan tersebut.

- Jika $D \neq 0$, maka sistem $AX = B$ mempunyai solusi unik.
- Jika $D = 0$ dan paling sedikit salah satu determinan pembilangnya adalah 0, maka sistem tersebut mempunyai banyak solusi yang tak terhingga.
- Jika $D = 0$ dan tidak ada satu pun determinan pembilangnya yang 0, maka sistem tersebut tidak mempunyai solusi.

Anda dapat memvisualisasikannya dari bagan aturan Cramer berikut.



Kondisi Aturan Cramer

Dari grafik dan penjelasan di atas, terlihat jelas bahwa aturan Cramer TIDAK berlaku jika D = 0. yaitu ketika determinan matriks koefisien adalah 0, kita tidak dapat mencari solusi sistem persamaan menggunakan aturan Cramer. Dalam hal ini kita dapat mencari solusinya (jika ada) dengan menggunakan Metode Gauss Jordan.

Jadi, aturan Cramer digunakan untuk mencari solusi suatu sistem hanya jika sistem tersebut mempunyai solusi unik.

Catatan Penting tentang Aturan Cramer:

Berikut beberapa catatan penting terkait penerapan aturan Cramer:

- Jika terdapat n variabel dan n persamaan, kita harus menghitung (n + 1) determinan.
- Aturan ini hanya dapat memberikan solusi jika $D \neq 0$.
- Jika $D = 0$, sistem mempunyai jumlah solusi yang tak terhingga atau tidak ada solusi.
- Kita tidak dapat menemukan solusi dengan menggunakan aturan ini jika sistem mempunyai jumlah solusi yang tidak terbatas.

Menyelesaikan SPL dengan Menggunakan Aturan Cramer

Kasus

Perhatikan kasus berikut ini.

Sebuah pabrik pupuk buatan memproduksi tiga (jenis) pupuk yaitu, pupuk A, B dan C. Banyak pupuk (ton) yang diproduksi dan biaya produksi (juta Rp) dalam tiga bulan pertama ditunjukkan pada tabel di bawah.

Berapa biaya produksi per ton masing-masing pupuk???

Waktu	Jenis Pupuk(ton)			Biaya Produksi (Juta Rp.)
	A	B	C	
Bulan ke-1	2	0	2	Rp. 16.000.000,00
Bulan ke-2	1	1	2	Rp. 17.000.000,00
Bulan ke-3	1	2	1	Rp. 16.000.000,00

Penyelesaian

Waktu	Jenis Pupuk(ton)			Biaya Produksi (Juta Rp.)
	A	B	C	
Bulan ke-1	2	0	2	Rp. 16.000.000,00
Bulan ke-2	1	1	2	Rp. 17.000.000,00
Bulan ke-3	1	2	1	Rp. 16.000.000,00

Misalkan biaya produksi pupuk A per ton adalah x_1
biaya produksi pupuk B per ton adalah x_2
biaya produksi pupuk C per ton adalah x_3

Sistem persamaan linearnya adalah

$$\begin{aligned} 2x_1 + \ 2x_3 &= 16 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 17 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 16 \end{aligned}$$

Persamaan matriks:

$AX = B$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 17 \\ 16 \end{bmatrix} \text{->}\ A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 16 \\ 17 \\ 16 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian

Untuk menyelesaiakan dengan aturan cramer, maka harus memenuhi syarat $|A| \neq 0$. determinan A dihitung dengan cara ekspansi baris 1 (k=1)

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{3} a_{1j}C_{1j} = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$$

$$= 2(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 0(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2(1)[1 - 4] + 0 + 2(1)[2 - 1]$$

$$= 2(-3) + 2(1) = -6 + 2 = -4 \neq 0$$

Karena $|A| \neq 0$ maka dapat menggunakan aturan cramer untuk mencari solusi SPL.

Penyelesaian

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 16 \\ 17 \\ 16 \end{bmatrix}$$

Akan dicari $|A_1|$ **yaitu** Determinan matriks A dengan menganti kolom ke-1 dengan elemen-elemen dari matriks B, (dengan ekspansi kolom ke 2 ($l = 2$))

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 16 & 0 & 2 \\ 17 & 1 & 2 \\ 16 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{3} a_{i2} C_{i2} = a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} + a_{32}C_{32}$$

$$= 0(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 17 & 2 \\ 16 & 1 \end{vmatrix} + 1(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 16 & 2 \\ 16 & 1 \end{vmatrix} + 2(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 16 & 2 \\ 17 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 0 + 1(1)[16 - 32] + 2(-1)[32 - 34]$$

$$= 1(-16) + (-2)(-2) = -16 + 4 = -12$$

Sehingga $x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-12}{-4} = 3$

Penyelesaian

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 16 \\ 17 \\ 16 \end{bmatrix}$$

Akan dicari $|A_2|$ **yaitu** Determinan matriks A dengan menganti kolom ke-2 dengan elemen-elemen dari matriks B, (dengan ekspansi kolom ke 1 (l =1))

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 2 & 16 & 2 \\ 1 & 17 & 2 \\ 1 & 16 & 1 \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{3} a_{i1}C_{i1} = a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + a_{31}C_{31}$$

$$= 2(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 17 & 2 \\ 16 & 1 \end{vmatrix} + 1(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 16 & 2 \\ 16 & 1 \end{vmatrix} + 1(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 16 & 2 \\ 17 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2(1)[17 - 32] + 1(-1)[16 - 32] + 1(1)[32 - 34]$$

$$= 2(-15) + (-1)(-16) + 1(-2) = -30 + 16 - 2 = -16$$

Sehingga $x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-16}{-4} = 4$

Penyelesaian

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 16 \\ 17 \\ 16 \end{bmatrix}$$

Akan dicari $|A_3|$ **yaitu** Determinan matriks A dengan menganti kolom ke-3 dengan elemen-elemen dari matriks B, (dengan ekspansi kolom ke 2 (l =2))

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 16 \\ 1 & 1 & 17 \\ 1 & 2 & 16 \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{3} a_{i2}C_{i2} = a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} + a_{32}C_{32}$$

$$= 0(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 17 \\ 1 & 16 \end{vmatrix} + 1(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 16 \\ 1 & 16 \end{vmatrix} + 2(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 16 \\ 1 & 17 \end{vmatrix}$$

$$= 0 + 1(1)[32 - 16] + 2(-1)[34 - 32]$$

$$= 0 + (1)(16) = -16 + (-4) = -20$$

Sehingga $x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{-20}{-4} = 5$

Kesimpulan

Diperoleh $x_1 = 3$, $x_2 = 4$ dan $x_3 = 5$..
Jadi biaya produksi per ton untuk pupuk A, B dan C, masing-masing berturut-turut adalah Rp.3.000.000,00, Rp. 4.000.000,00 dan Rp.5.000.000,00

Thanks!