

VEKTOR

Egi Safitri, S.Mat., M.Si

1. Ruang Vektor Umum

Misalkan $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ dan $k, l \in R$

V dinamakan ruang vektor jika :

1. untuk setiap $\vec{u}, \vec{v} \in V$ maka $\vec{u} + \vec{v} \in V$ (V tertutup terhadap operasi penjumlahan)
2. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
3. $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$
4. untuk setiap $\vec{u} \in V$ terdapat $-\vec{u}$, maka $\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = 0$

Ruang Vektor Umum

5. untuk setiap $\vec{u} \in V$ dan $k, l \in R$ maka $k\vec{u} \in V$ (V tertutup terhadap operasi perkalian dengan scalar)
6. $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
7. $(k + l)\vec{u} = k\vec{u} + l\vec{u}$
8. $k(l\vec{u}) = l(k\vec{u}) = (kl)\vec{u}$
9. $1\vec{u} = \vec{u}$

Ruang Vektor

Contoh Ruang Vektor:

Contoh :

- Himpunan vektor Euclides dengan operasi standar (operasi penjumlahan dan operasi perkalian dengan skalar).
Notasi : R^n (Ruang Euclides orde n)
- Himpunan matriks berukuran $m \times n$ dengan operasi standar (penjumlahan matriks dan perkalian matriks dengan skalar),
Notasi : $M_{m \times n}$ (Ruang Matriks $m \times n$)
- Himpunan polinom pangkat n dengan operasi standar.
Notasi : P_n (Ruang Polinom orde n)

Ruang Vektor

Ruang Euclides orde n

► Operasi-operasi pada ruang vektor Euclides:

- Penjumlahan

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n)$$

- Perkalian dengan scalar Riil sebarang (k)

$$k\vec{u} = (ku_1, ku_2, \dots, ku_n)$$

- Perkalian titik (Euclidean inner product)

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n$$

Panjang vektor didefinisikan oleh:

$$\|\vec{u}\| = (\vec{u} \cdot \vec{u})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2}$$

Jarak antara dua vektor didefinisikan oleh:

$$d(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \dots + (u_n - v_n)^2}$$

Ruang Vektor...

Contoh:

- ▶ Diketahui $\vec{u} = (1, 1, 2, 3)$ dan $\vec{v} = (2, 2, 1, 1)$
Tentukan panjang masing-masing vektor dan jarak antara kedua vektor tersebut

Jawab:

- ▶ Panjang vektor:

$$\|\vec{u}\| = (\vec{u} \cdot \vec{u})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{15}$$

$$\|\vec{v}\| = (\vec{v} \cdot \vec{v})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

- ▶ Jarak antar kedua vektor:

$$\begin{aligned} d(\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u} - \vec{v}\| &= \sqrt{(1 - 2)^2 + (1 - 2)^2 + (2 - 1)^2 + (3 - 1)^2} \\ &= \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (1)^2 + (2)^2} = \sqrt{7} \end{aligned}$$

Latihan soal 1 :

Diketahui:

$$\vec{u} = (2, 1, 0, 4) \text{ dan } \vec{v} = (2, -1, 1, 3)$$

Tentukan panjang masing-masing vektor dan jarak antara kedua vektor tersebut!

2. Sub Ruang Vektor , \subseteq

1. Misal W merupakan subhimpunan dari sebuah ruang vektor V W dinamakan subruang (subspace) V jika W juga merupakan ruang vektor yang tertutup terhadap operasi penjumlahan dan perkalian dengan scalar
2. Syarat W disebut subruang dari V adalah:
 - a. $W \neq \{ \}$
 - b. $W \subseteq V$, (\subseteq = sub ruang)
 - c. Jika $\vec{u}, \vec{v} \in W$ maka $(\vec{u} + \vec{v}) \in W$
 - d. Jika $\vec{u}, \in W$ dan $k \in R$ maka $\overline{ku} \in W$

Sub Ruang Vektor , \subseteq

Contoh 1:

- ▶ Tunjukkan bahwa himpunan W yang berisi semua matriks orde 2×2 dimana setiap unsur diagonalnya adalah nol merupakan subruang dari ruang vektor matriks 2×2

Jawab:

- ▶ $0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in W$ maka $W \neq \{\}$
- ▶ Jelas bahwa $W \subseteq V$

Sub Ruang Vektor, \subseteq

- ▶ Ambil sembarang matriks $A, B \in W$ maka

Perhatikan bahwa:

$$A + B = \begin{bmatrix} 0 & a_1 \\ a_2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ b_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 & 0 \end{bmatrix}$$

Ini menunjukkan bahwa $A + B \in W$

- ▶ Ambil sembarang matriks $A \in W$ dan $k \in \text{Riil}$ maka

$$kA = k \begin{bmatrix} 0 & a_1 \\ a_2 & 0 \end{bmatrix} \in W$$

Ini menunjukkan bahwa $kA \in W$

Jadi, W merupakan subruang dari $M_{2 \times 2}$

Pertanyaan :

Apakah $AxB \in W$
dan $kB \in W$?

3. Kombinasi Linear

- ▶ Sebuah vektor \vec{u} dinamakan kombinasi linear dari vektor-vektor $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$

Jika vektor \vec{u} tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$\vec{u} = k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 + \dots + k_n\vec{v}_n$$

dimana k_1, k_2, \dots, k_n adalah skalar Riil

Kombinasi Linear

Contoh:

- ▶ Misal $\vec{u} = (2,4,0)$ dan $\vec{v} = (1,-1,3)$ adalah vektor-vektor di R^3 .

Apakah vektor berikut merupakan kombinasi linear dari vektor-vektor di atas

– $\vec{a} = (4,2,6)$

– $\vec{b} = (1,5,6)$

– $\vec{c} = (0,0,0)$  Tugas 1

Kombinasi Linear

Jawab:

a. Tulis $k_1\vec{u} + k_2\vec{v} = \vec{a}$

Akan diperiksa apakah ada k_1, k_2 sehingga kesamaan tersebut dipenuhi

$$k_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Persamaan diatas dapat dituliskan dalam bentuk perkalian matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Latihan soal 2 : Buktikan!

menggunakan OBE diperoleh:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & -6 \\ 0 & 3 & 6 \end{array} \right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Dengan demikian \vec{a} merupakan kombinasi linear dari vektor \vec{u} dan \vec{v} atau

$$\vec{a} = \vec{u} + 2\vec{v}$$

Kombinasi Linear

b. Tulis $k_1\vec{u} + k_2\vec{v} = \vec{b}$

Akan diperiksa apakah ada k_1, k_2 sehingga kesamaan tersebut dipenuhi

$$k_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Persamaan diatas dapat dituliskan dalam bentuk perkalian matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Latihan soal 3 : Buktikan!

menggunakan OBE diperoleh:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \end{array} \right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 9 \end{array} \right]$$

Baris terakhir pada matriks ini menunjukkan bahwa SPL tersebut tidak konsisten (tidak mempunyai solusi). Jadi, tidak ada nilai k_1 dan k_2 yang memenuhi persamaan tersebut. Oleh karena itu, \vec{b} tidak dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari \vec{u} dan \vec{v}

THANK YOU
