Contoh :

Tentukan nilai eigen dari matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\left| \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0$$

Persamaan Karakteristik ***det*** **(A – λI) = 0**

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ -1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

- Dengan ekspansi kopaktor sepanjang kolom ke-2

$$(1-\lambda)\ \left((1-\lambda)(-\lambda) - 2 \right) = 0$$

$$(1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2) = 0$$

$$(1-\lambda)(\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0$$

Jadi, matriks A memiliki tiga buah nilai eigen yaitu :

$$\lambda = -1,\ \lambda = 1,\ \text{dan}\ \lambda = 2.$$

Contoh :

Tentukan Nilai eigen dari :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Jawab :

Nilai eigen dari A diperoleh saat $\det\left(A - \lambda I\right) = 0$

$$\begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\rightarrow \quad \left(\lambda - 2\right) \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & \lambda - 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$\rightarrow \quad (\lambda - 2)\{(\lambda - 2)^2 - 1\} + (-\lambda + 1) - (1 + (\lambda - 2)) = 0$

$\rightarrow \quad (\lambda - 2)\{\lambda^2 - 4\lambda + 3\} - (\lambda - 1) - (\lambda - 1) = 0$

$\rightarrow \quad (\lambda - 2)\{(\lambda - 3)(\lambda - 1)\} - 2(\lambda - 1) = 0$

$\rightarrow \quad (\lambda - 1)((\lambda - 2)(\lambda - 3) - 2) = 0$

$\rightarrow \quad (\lambda - 1)(\lambda^2 - 5\lambda + 4) = 0$

$\rightarrow \quad (\lambda - 1)^2(\lambda - 4) = 0$

Contoh :

Tentukan nilai eigen dan vektor eigen $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Persamaan Karakteristiknya adalah

$$det\ \{\lambda.I - A\} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = \begin{vmatrix} (\lambda - 2) & -1 \\ -1 & (\lambda - 2) \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = (\lambda - 2)(\lambda - 2) - 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = (\lambda^2 - 4\lambda + 4) - 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = \lambda^2 - 4\lambda + 3$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$$

diperoleh $\lambda = 1$; $\lambda = 3$

Untuk $\lambda = 1$

$$(\lambda.I - A) \sim \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 + x_2 = 0$$
$$x_1 = -x_2$$
$$x_2 = t$$

Jadi vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 1$

adalah vektor tak nol yang berbentuk

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} t$, dimana t merupakan parameter.

Untuk $\lambda = 3$

$$(\lambda.I - A) \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 - x_2 = 0$$
$$x_1 = x_2$$
$$x_2 = t$$

Jadi vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 3$ adalah vektor tak nol yang berbentuk

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t,$$ dimana t merupakan parameter

Contoh :

Tentukan nilai eigen dan vektor eigen matriks

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Jawab :

Persamaan karakteristik dari matriks A adalah :

$$\left| \lambda . I - A \right| = 0$$

atau

$$\det \left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right) = 0$$

$$\det\begin{pmatrix}(\lambda-1) & 0 & 0\\ 0 & (\lambda-1) & -1\\ 0 & -1 & (\lambda-1)\end{pmatrix}=0$$

Dengan menggunakan ekspansi kofaktor :
Pilih Baris I

$$\det\{\lambda.I-A\}=a_{11}c_{11}+a_{12}c_{12}+a_{13}c_{13}$$

$$=(\lambda-1)\,(\lambda)\,(\lambda-2)+0+0$$

$$=(\lambda-1)\,(\lambda)\,(\lambda-2)$$

Sehingga diperoleh nilai eigen

$$\lambda=0\ \ ;\ \lambda=1\ \ ;\ \lambda=2$$

Untuk $\lambda = 0$

Dengan OBE maka

$$(\lambda . I - A) \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} t$$

, dimana t adalah parameter tak nol

Jadi vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 0$ adalah

$$\overline{P_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Untuk $\lambda = 1$

Dengan OBE maka

$$\left(\lambda.I - A\right) \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} t$$, dimana t adalah parameter tak nol

Jadi vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 1$ adalah

$$\overline{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Untuk $\lambda = 2$

Dengan OBE maka

$$(\lambda.I - A) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} t$$, dimana t adalah parameter tak nol

Jadi vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 2$

adalah

$$\overline{P}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$