MATEMATIKA DISKRIT
Pertemuan 9

Egi Safitri, S.Mat., M.Si
Program Studi Sains Data
Fakultas Ilmu Komputer
Institut Informatika dan Bisnis Darmajaya, Bandar Lampung

2024

Apa itu Probabilitas?

Konsep Probabilitas

Kata -kata seperti 'pasti', 'mungkin', 'mungkin', 'tidak pernah' berkaitan dengan istilah probabilitas. Arti harafiahnya adalah probabilitas yang kemungkinan besar akan terjadi. Ini adalah ukuran untuk menghitung peluang atau kemungkinan terjadinya suatu peristiwa acak . Dengan kata sederhana, ini menghitung peluang hasil yang menguntungkan di antara seluruh kemungkinan hasil.

Secara matematis, jika Anda ingin menjawab apa itu probabilitas, maka probabilitas didefinisikan sebagai rasio jumlah kejadian yang menguntungkan dengan jumlah total kemungkinan hasil percobaan acak . Hal ini dilambangkan dengan 'p'. Peluang suatu kejadian, katakanlah, A,

Konsep Probabilitas

Probabilitas dari satu peristiwa tunggal (kasus yang memiliki probabilitas yang sama untuk setiap hasil):Jika semua hasil memiliki probabilitas yang sama, maka probabilitas suatu peristiwa A dihitung sebagai:

$$P(A) = \frac{\text{Jumlah hasil yang mungkin untuk } A}{\text{Jumlah total hasil yang mungkin}} \tag{1}$$

Istilah yang berkaitan dengan probabilitas

- **Eksperimen Acak**: Eksperimen tersebut, (dilakukan dalam situasi yang identik), yang hasilnya sama di setiap jalur tetapi prediksinya tidak pasti. Eksperimen yang jumlah total hasilnya sama pada semua kasus, tetapi kemunculan hasilnya tidak dapat diprediksi adalah eksperimen acak.
- **Hasil**: Berbagai kemungkinan hasil percobaan acak.
- **Ruang Sampel**: Himpunan semua kemungkinan hasil adalah ruang sampel. Itu dilambangkan dengan S.
- **Titik Sampel**: Setiap elemen ruang sampel atau setiap hasil percobaan acak.

Terminologi Probabilitas

- **Peristiwa**: Bagian dari ruang sampel adalah suatu peristiwa.
- **Peristiwa Pasti** : Peristiwa yang pasti terjadi atau seluruh ruang sampel.
- **Peristiwa yang Mustahil**: Himpunan kosong adalah peristiwa yang mustahil.
- **Peristiwa Komplementer**: kejadian yang terjadi ketika peristiwa lainnya tidak terjadi. Dilambangkan dengan $A' \cdot A' = 1 – A$. Jika A melambangkan keberhasilan, maka A' melambangkan kegagalan.

Fitur Dasar Probabilitas

1. Probabilitasnya berkisar dari 0 hingga 1. 1: hasil tertentu; 0: ketidakmungkinan; dan berbagai nilai di antaranya mengukur ketidakpastian.
2. P[jumlah semua kejadian yang mungkin terjadi]=1.
3. P[jumlah kejadian]= Jumlah probabilitas kejadian.

Fitur Dasar probabilitas

Percobaan

Percobaan adalah suatu tindakan atau kegiatan untuk memperoleh hasil tertentu. Percobaan disebut juga dengan eksperimen. **Contoh percobaan** antara lain melempar **dadu**, melempar **uang koin**, mengambil **kartu** secara acak dari tumpukan kartu, dan lain-lain. Dengan melakukan percobaan, kita bisa mendapatkan hasil atau disebut juga sebagai **titik sampel**.

Titik Sampel

Titik sampel adalah hasil dari percobaan.

Misalnya, kita melakukan percobaan melempar satu buah dadu, maka titik sampelnya adalah (1), (2), (3), (4), (5), dan (6). Sementara itu, jika kita melakukan percobaan melempar satu buah uang koin, maka titik sampelnya adalah (A) dan (G). A berarti Angka dan G berarti Gambar.

Ruang Sampel

Ruang sampel adalah himpunan dari titik sampel. Ruang sampel juga biasa disebut dengan semesta dan disimbolkan dengan S. Ruang sampel berisi seluruh titik sampel yang ada, alias semua kemungkinan yang dapat muncul pada suatu percobaan

Contoh dari percobaan pada pembahasan titik sampel tadi. Percobaan pertama yaitu melempar satu buah dadu, dengan titik sampelnya adalah (1), (2), (3), (4), (5), dan (6). Maka, ruang sampelnya adalah $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Kemudian, percobaan kedua yaitu melempar satu buah uang koin, dengan titik sampelnya adalah (A) dan (G). Maka, ruang sampelnya adalah $S = \{A, G\}$.

Menyusun Ruang Sampel

Ada tiga cara untuk menyusun anggota ruang sampel, yaitu dengan cara mendaftar, menggunakan diagram pohon, dan menggunakan tabel.

Cara Mendaftar

Cara pertama adalah menyusun anggota ruang sampel dengan mendaftar alias menuliskan seluruh anggota ruang sampel secara berurutan. Cara ini bisa dipilih ketika anggota ruang sampelnya tidak terlalu banyak.
Contohnya, saat kita melemparkan dua buah koin sekaligus, maka titik sampel atau semua hasil yang mungkin terjadi dari percobaan tersebut adalah $(A, A), (A, G), (G, A)$, dan (G, G).
Maka, diperoleh ruang sampel:

$$S = \{(A, A), (A, G), (G, A), (G, G)\}$$

Banyak anggota ruang sampel $\rightarrow n(S) = 4$

Menyusun Ruang Sampel

Menyusun Ruang Sampel

Ada tiga cara untuk menyusun anggota ruang sampel, yaitu dengan cara mendaftar, menggunakan diagram pohon, dan menggunakan tabel.

Diagram Pohon

Cara kedua adalah menyusun anggota ruang sampel dengan diagram pohon. Cara ini bisa dipilih ketika anggota ruang sampelnya cukup banyak dan akan memakan waktu jika menggunakan cara mendaftar.
Contohnya, saat kita melemparkan satu buah uang koin dan satu buah dadu, maka kemungkinan kejadiannya adalah munculnya angka (A) atau gambar (G) pada koin, dan salah satu mata dadu pada dadu.
Misalkan, uang koin dianggap bagian pertama, sementara dadu dianggap bagian kedua, maka bisa digambarkan diagram pohon sebagai berikut:

Menyusun Ruang Sampel

Menyusun Ruang Sampel

Ada tiga cara untuk menyusun anggota ruang sampel, yaitu dengan cara mendaftar, menggunakan diagram pohon, dan menggunakan tabel.

Menggunakan Tabel

Cara ketiga adalah menyusun anggota ruang sampel dengan tabel. Cara ini bisa dipilih ketika anggota ruang sampelnya sangat banyak dan akan memakan waktu jika menggunakan cara mendaftar maupun diagram pohon.
Contohnya, saat kita melemparkan dua buah dadu sekaligus, maka pada masing-masing dadu akan ada 6 kemungkinan kejadian yang muncul, yaitu mata dadu 1, 2, 3, 4, 5, dan 6. Jika kita susun dalam sebuah tabel, maka didapatkan hasil sebagai berikut:

Menyusun Anggota Ruang Sampel dengan Tabel

Dadu 1	Dadu 2					
	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Maka, diperoleh ruang sampel:

$$S =$$

$$\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),$$

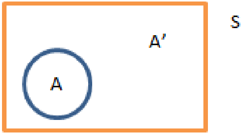
Banyak anggota ruang sampel $\rightarrow n(S) = 36$

Teorema 1

Peluang terjadinya kejadian komplementer A' dari A diberikan oleh $P(A') = 1 - P(A)$.

Bukti: Peristiwa A dan A' saling lepas dan bersama-sama membentuk ruang sampel utuh.

$$
\begin{aligned}
A \cup A' = S &\Rightarrow P(A \cup A') = P(S) \\
P(A) + P(A') &= P(S) = 1 \\
P(A') &= 1 - P(A)
\end{aligned}
$$



Teorema 2

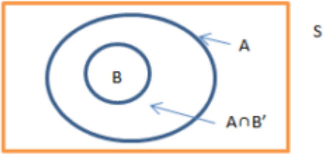
Peluang terjadinya kejadian yang mustahil adalah nol.
Pembuktian: Misalkan A adalah kejadian yang mustahil dan S adalah kejadian pasti. $S = A'$ dan $A = \emptyset$.

$$P(\emptyset) = P(A) = P(S') = 1 - P(S) = 1 - 1 = 0.$$

Teorema 3

Jika B adalah subset dari A, maka

$$P(A \cap B') = P(A) - P(B)$$
$$P(B) \leq P(A)$$



Bukti:

1. Jika B himpunan bagian dari A, B dan $A \cap B'$ merupakan kejadian saling lepas.
   $A = B \cup (A \cap B')$ atau $P(A) = P[B \cup (A \cap B')] = P(A) = P(B) + P(A \cap B')$ atau $P(A \cap B') = P(A) - P(B)$.
2. $P(A \cap B') \geq 0$ atau $P(A) - P(B) \geq 0$ atau $P(B) \leq P(A)$.

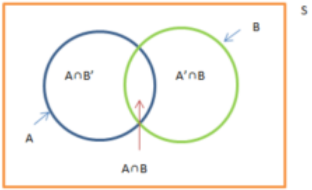
Teorema 4

Misalkan A adalah suatu peristiwa. Maka $0 \leq P(A) \leq 1$
Bukti: Setiap kejadian A merupakan himpunan bagian dari S, $A \subset S$. $P(A) \leq P(S)$ atau $P(A) \leq 1$. Untuk kejadian A selain kejadian mustahil, $P(A) \geq 0$. Oleh karena itu, $0 \leq P(A) \leq 1$.

Teorema 5

Jika A dan B adalah dua kejadian dan tidak saling lepas, maka $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. A dan B adalah himpunan bagian dari ruang sampel S.

Bukti: Dari diagram Venn kita punya $A \cup B = A \cup (A' \cap B)$.



Di sini, A dan $A' \cap B$ saling lepas. Di sini, $A' \cap B = B - (A \cap B)$ dan $A \cap B' = A - (A \cap B)$. Oleh karena itu, $P(A \cup B) = P[A \cup (A' \cap B)] = P(A) + P(A' \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Ini adalah teorema penjumlahan probabilitas.

Teorema 6

Jika A dan B adalah dua kejadian sehingga $P(A) \neq 0$ dan $P(B) \neq 0$. Jika A dan B adalah dua kejadian bebas maka $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Ini adalah teorema perkalian probabilitas.

Penerapan Peluang Diskrit dalam Analisis Data

1. **Contoh: Lemparan Dadu**
   - **Peluang Setiap Hasil:**
     - Setiap hasil memiliki peluang yang sama, yaitu $\frac{1}{6}$ karena dadu adil.
   - **Perhitungan Probabilitas:**
     - Misalkan kita ingin menghitung peluang munculnya angka genap (2, 4, atau 6).

$$P(\text{genap}) = P(2) + P(4) + P(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

     - Misalkan kita ingin menghitung peluang munculnya angka ganjil dan lebih besar dari 3 (5 atau 6).

$$P(\text{ganjil dan } > 3) = P(5) + P(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

   - **Penerapan dalam Analisis Data:**
     - Dalam analisis data, informasi ini dapat digunakan untuk mengambil keputusan atau membuat prediksi. Misalnya, dalam permainan dadu, pemain dapat menggunakan peluang untuk membuat strategi taruhan yang lebih cerdas.

Contoh

Sebuah tas terdiri dari 3 bola merah, 5 bola biru, dan 8 bola hijau. Sebuah bola dipilih secara acak. Temukan kemungkinannya

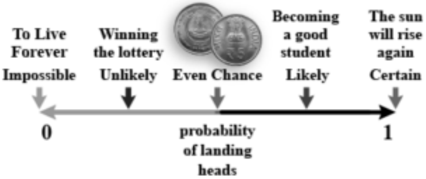
1. Mendapatkan bola merah.
2. Mendapatkan bola hijau.
3. Tidak mendapatkan bola biru

Jawaban : Jumlah bola $= 3 + 5 + 8 = 16$.

1. Misalkan R adalah kejadian terambilnya bola merah. Banyaknya hasil yang diinginkan adalah 3. Probabilitas yang dibutuhkan adalah $P(R) = \frac{3}{16}$.
2. Misalkan G adalah kejadian terambilnya bola hijau. Banyaknya hasil yang diinginkan $= 8$. Probabilitas yang dibutuhkan adalah $P(G) = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$.
3. Misalkan B adalah kejadian terambilnya bola biru. Banyaknya hasil yang menguntungkan $= 5$. Peluang terambilnya bola biru $P(B) = \frac{5}{16}$. Peluang tidak terambilnya bola biru $P(B') = 1 - P(B) = 1 - \frac{5}{16} = \frac{11}{16}$.

Selain itu, kejadian tidak mendapat bola biru sama dengan kejadian mendapat bola merah atau hijau. $P(B') = P(R) + P(G) = \frac{3}{16} + \frac{8}{16} = \frac{11}{16}$

Rentang Kemungkinan



Jika suatu kejadian tidak mungkin terjadi maka probabilitasnya adalah nol. Demikian pula, jika suatu peristiwa pasti terjadi, maka probabilitasnya adalah satu. Probabilitas suatu kejadian terletak di antara nilai-nilai ini. Ini disebut rentang probabilitas dan dinotasikan sebagai $0 \leq P(E) \leq 1$.

Menemukan Probabilitas Suatu Peristiwa

Jadi mari kita jelajahi ini melalui sebuah contoh. Katakanlah dua buah uang logam dilempar, Anda harus mencari peluang kejadian berikut.

1. Setidaknya satu ekor muncul
2. Tidak ada kepala yang muncul
3. Paling banyak muncul satu ekor

Jadi untuk mencari peluang suatu kejadian A dalam ruang berhingga S.

$$P(A) = \frac{\text{Jumlah hasil yang mungkin untuk } A}{\text{Jumlah total hasil yang mungkin}} \tag{2}$$

Jawaban:

$$S = \{HH, HT, TH, TT\} = n(S) = 4$$

1. Misalkan A adalah kejadian ketika paling sedikit satu kepala muncul, Jadi $A = \{HT, TH, TT\}; n(A) = 3; P(A) = \frac{3}{4}$
2. Disini A adalah kejadian dimana tidak ada kepala yang muncul, jadi $A = \{TT\}; n(A) = 1; P(A) = \frac{1}{4}$
3. Disini A adalah kejadian munculnya paling banyak satu ekor, jadi $A = \{HH, TH, HT\}; n(A) = 3; P(A) = \frac{3}{4}$

Pertanyaan 1: Peluang Hari Minggu

Tentukan peluang bulan yang dipilih secara acak mempunyai hari ke 10 pada hari Minggu.

Jawaban: Jadi mari kita selesaikan ini langkah demi langkah.

- Peluang terambilnya bulan mana pun dari 12 bulan yang diberikan adalah $\frac{1}{12}$.
- Ada 7 kemungkinan hari tanggal 10 suatu bulan bisa jatuh. Jadi peluang jatuhnya pada hari Minggu adalah $\frac{1}{7}$.
- Jadi peluang suatu bulan yang dipilih secara acak mempunyai hari ke 10 pada hari Minggu adalah:

$$\frac{1}{12} \times \frac{1}{7} = \frac{1}{84}$$

Pertanyaan 2: Peluang Bilangan Bulat

Satu bilangan bulat dipilih dari 1,2,3,...,100. Berapa peluang bola tersebut tidak habis dibagi 4 dan tidak habis dibagi 6?

Jawaban: Dari angka 1-100,

- Bilangan yang habis dibagi 4 adalah 25.
- Bilangan yang habis dibagi 6 adalah 16.
- Bilangan yang habis dibagi 12 (KPK 4 dan 6) adalah 8.
- Bilangan yang habis dibagi 4 atau 6 adalah $25 + 16 - 8 = 33$.
- Bilangan yang tidak habis dibagi 4 atau 6 adalah $100 - 33 = 67$.
- Probabilitas yang Diperlukan adalah $\frac{67}{100} = 0,67$.