MATEMATIKA DISKRIT

Pertemuan 13

Egi Safitri, S.Mat., M.Si
Institut Informatika dan Bisnis Darmajaya, Bandar Lampung

2024

Definisi Matriks Hessian

Matriks Hessian adalah matriks yang terdiri dari turunan kedua suatu fungsi multivariabel. Untuk fungsi $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, matriks Hessiannya didefinisikan sebagai:

$$H(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Penggunaan Matriks Hessian dalam Optimasi Multivariabel

Matriks Hessian digunakan dalam optimasi multivariabel untuk:

- Mengidentifikasi titik kritis (minimum, maksimum, saddle points) dari fungsi.
- Menentukan kekonvergenan dan kestabilan algoritma optimasi.
- Mempercepat konvergensi algoritma optimasi dengan memperhitungkan informasi kedua turunan fungsi.

Interpretasi Geometris Matriks Hessian

Interpretasi geometris matriks Hessian:

- Determinan matriks Hessian memberikan informasi tentang bentuk paraboloid dari fungsi.
- Eigenvalues matriks Hessian menunjukkan arah dan kecepatan perubahan fungsi.
- Eigenvectors matriks Hessian menunjukkan arah di mana perubahan terjadi.

Arti Minimum Lokal dan Maksimum Lokal

- Titik minimum lokal dan maksimum lokal adalah konsep penting dalam analisis matematis.
- Mereka menggambarkan sifat titik kritis dari fungsi multivariabel.

Minimum Lokal

Sebuah titik (x, y) pada fungsi $f(x, y)$ dikatakan sebagai minimum lokal jika ada suatu lingkungan sekitar titik tersebut di mana nilai fungsi $f(x, y)$ tidak lebih kecil daripada nilai di titik tersebut.

Maksimum Lokal

Sebuah titik (x, y) pada fungsi $f(x, y)$ dikatakan sebagai maksimum lokal jika ada suatu lingkungan sekitar titik tersebut di mana nilai fungsi $f(x, y)$ tidak lebih besar daripada nilai di titik tersebut.

Titik-Titik Kritis

- Titik kritis dalam analisis multivariabel dapat berupa minimum lokal, maksimum lokal, atau saddle point.
- Penentuan jenis titik kritis bergantung pada evaluasi eigenvalues dari matriks Hessian $H_f(x, y)$.

Eigenvalues dari Matriks Hessian

Matriks Hessian $H_f(x, y)$ dari fungsi $f(x, y)$ memiliki eigenvalues λ_1 dan λ_2. Berdasarkan nilai eigenvalues, kita dapat menentukan jenis titik kritis:

- Jika $\lambda_1 > 0$ dan $\lambda_2 > 0$: minimum lokal.
- Jika $\lambda_1 < 0$ dan $\lambda_2 < 0$: maksimum lokal.
- Jika λ_1 dan λ_2 memiliki tanda yang berlawanan: saddle point.

Contoh

Soal

Hitung matriks Hessian dari fungsi $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$.

Jawaban:
Turunan kedua fungsi $f(x, y)$ adalah:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$$

Jadi, matriks Hessian dari $f(x, y)$ adalah:

$$H(f) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Contoh

Soal

Diberikan fungsi $f(x, y) = 3x^2 + 2xy + y^3$. Hitunglah matriks Hessian $H_f(x, y)$ dan tentukan jenis titik kritis dari fungsi ini.

Jawaban

1. Perhitungan Matriks Hessian

Untuk fungsi $f(x, y) = 3x^2 + 2xy + y^3$, kita perlu menghitung turunan kedua parsialnya.

- Turunan parsial pertama:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x + 2y, \frac{\partial f}{\partial y} = 2x + 3y^2$$

- Turunan parsial kedua:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2$$

- Matriks Hessian $H_f(x, y)$:

$$H_f(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 6y \end{bmatrix}$$

Untuk menentukan jenis titik kritis, kita perlu mengevaluasi eigenvalues dari matriks Hessian $H_f(x, y)$ yakni Eigenvalues: $\lambda_1 = 6$ dan $\lambda_2 = 6y$. Diperoleh evaluasi sebagai berikut,

- Jika $y > 0$, maka $\lambda_2 = 6y > 0$, sehingga titik kritis adalah minimum lokal.
- Jika $y < 0$, maka $\lambda_2 = 6y < 0$, sehingga titik kritis adalah maksimum lokal.
- Jika $y = 0$, maka titik kritis adalah saddle point karena $\lambda_1 = 6 > 0$ dan $\lambda_2 = 0$.