Pengantar Peluang

EGI SAFITRI, S.MAT., M.SI

I Konsep Peluang (Probabilitas)

Percobaan random : percobaan yang kemungkinan hasilnya dapat diterka, tetapi tidak dapat diketahui dengan pasti kemungkinan mana yang muncul.

Eksperimen merupakan percobaan yang dapat diulang dengan kondisi yang sama, sedangkan hasilnya belum tentu sama atau Eksperimen adalah proses yang menghasilkan *outcome* (output).

Probabilitas

Event (peristiwa/kejadian) : *outcome* dari suatu eksperimen

Outcome : hasil pengamatan pada eksperimen

Ruang sample : kumpulan semua *outcome* yang mungkin dari suatu eksperimen

Diagram Venn dan diagram pohon : penggambaran ruang sampel

Probabilitas

P(A) = peluang (probabilitas) bahwa kejadian(*Event*) A terjadi

$0 \leq P(A) \quad 1$

P(A)=0 artinya A tidak mungkin terjadi

P(A)=1 artinya A pasti terjadi

Sifat Probabilitas:

1. $0 \leq P(Ei) \leq 1$

2. $\sum P(Ei) = 1$

Penentuan nilai probabilitas (Pendekatan Konseptual)

1. Probabilitas Klasik

   Bila N = total banyak *outcome* yang mungkin pada satu eksperimen,
   n(A)=banyak *outcome* dimana event A terjadi

$$p(A) = \frac{n(A)}{N}$$

2. Konsep Frekuensi Relatif

   Jika eksperimen dilakukan n kali dan event A teramati f kali, maka :

$$p(A) = \frac{n(A)}{N} = \frac{f}{N}$$

Penentuan nilai probabilitas (Pendekatan Konseptual)

Probabilitas Subjektif : hanya didasarkan atas perasaan, intuisi atau pengetahuan orang yang menentukan probabilitas. Walau bukan merupakan cara ilmiah, namun pendekatan ini dapat saja menghasilkan probabilitas yang cukup akurat.

Struktur Probabilitas (suatu contoh)

Eksperimen

Mencatat kurs US$ terhadap rupiah setiap hari Senin, pukul 9 hingga 12

Event (kejadian)

mendapati kurs US$ terhadap rupiah kurang dari 10000

Elementry Event: event yang tidak dapat dipecah lagi menjadi event lain.

Struktur Probabilitas (suatu contoh)

Sebuah dadu seimbang dilempar sekali, dilihat sisi dadu yang muncul. Ruang sampelnya ={1,2,3,4,5,6}

Union ="atau" = gabungan. Simbol : $\cup$

Intersection = "dan" = irisan. Simbol : $\cap$

Bila X={1,2,3,4,5} dan Y={3,5,7,9,11} maka $X \cup Y$ = {1,2,3,4,5,7,9,11}

dan $X \cap Y$ = {3,5}

Struktur Probabilitas

Mutually Exclusive Events adalah kejadian –kejadian yang tidak mempunyai irisan. Artinya, kejadian yang satu meniadakan kejadian yang lainnya; kedua kejadian tidak dapat terjadi secara simultan. Jadi :

$$P(X \cap Y) = 0$$

apabila X dan Y *mutually exclusive*.

Struktur Probabilitas

Independent Event adalah kejadian-kejadian satu sama lain tidak saling mempengaruhi. Artinya terjadi atau tidak terjadinya suatu kejadian tidak mempengaruhi terjadi atau tidak terjadinya kejadian yang lain. Jadi :

$$P(X|Y)=P(X)$$

$$P(Y|X)=P(Y)$$

apabila X dan Y adalah kejadian independen. $P(X|Y)$ artinya probabilitas bahwa X terjadi apabila diketahui Y telah terjadi.

Struktur Probabilitas

Collectively Exhaustive Events adalah semua kejadian elementer (*elementary events*) yang mungkin terjadi pada sebuah eksperimen. Jadi sebuah ruang sample selalu terdiri atas *Collectively Exhaustive Events.*

Komplemen dari suatu kejadian A dinotasikan dengan A' atau A^c artinya "bukan A" adalah semua kejadian elementer pada suatu eksperimen yang bukan A. Jadi $P(A)+P(A^{c)})=1$

Aturan Perhitungan Outcome

Untuk suatu operasi yang dapat dilakukan dengan m cara dan operasi kedua yang dilakukan dengan n cara, maka kedua operasi dapat dilakukan mn cara. Aturan ini dapat dikembangkan untuk tiga atau lebih operasi.

Pengambilan Sample dari Suatu Populasi

Pengambilan sampel berukuran n dari populasi berukuran N dengan pengembalian (*with replacement*) akan menghasilkan :

N^n kemungkinan

Pengambilan sampel berukuran n dari populasi berukuran N tanpa pengembalian (*without replacement*) menghasilkan ${}_N C_n$ kemungkinan,

$$ {}_N C_n = \binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!} $$

Kaidah Penggandaan

Bila suatu operasi dapat dilakukan dalam n_1 cara, dan bila untuk setiap cara tersebut operasi kedua dapat dilakukan dengan n_2 cara, maka kedua operasi tersebut secara bersama-sama dapat dilakukan dalam $n_1.n_2$ cara.

Contoh

1. Bila dua buah dadu dilempar sekali, maka banyak titik sampel dari ruang sampelnya adalah ...

- ➢ Dadu pertama memiliki 6 titik sampel (cara), dan untuk masing-masing dari keenam titik sampel tersebut, dadu kedua juga memiliki 6 titik sampel, maka sepasang dadu tersebut memiliki titik sampel sebanyak 6. 6 = 36 cara.

2. Dua keping uang logam dengan sisi A dan G dilempar sekali, banyak titik sampelnya adalah sebanyak 2.2 = 4 cara.

Kaidah Penggandaan Umum

Bila suatu operasi dapat dilakukan dalam n_1 cara, bila untuk setiap cara tersebut operasi kedua dapat dilakukan dengan n_2 cara, bila untuk setiap pasangan dua cara pertama operasi ketiga dapat dilakukan dengan n_3 cara, demikian seterusnya maka k operasi dalam urutan tersebut dapat dilakukan dalam $n_1.n_2.n_3 \ldots n_k$ cara.

Contoh :

Banyak jalan dapat ditempuh dari lantai 1 ke lantai 4 sebuah gedung bila dari lantai 1 ke lantai 2 terdapat 3 tangga/jalan, dari lantai 2 ke lantai 3 terdapat 2 jalan dan dari lantai 3 ke lantai 4 terdapat 2 jalan, akan ada sebanyak :

3. 2. 2. = 12 cara

Permutasi

Permutasi adalah suatu susunan yang dibentuk oleh keseluruhan atau sebagian dari sekumpulan data.

Banyak permutasi dari n benda berbeda ada sebanyak n! (n! = n.(n-1).(n-2)... 2.1

Contoh:

Banyak cara duduk berjejer dari 4 orang adalah 4! = 4.3.2.1. = 24

Permutasi

Banyaknya permutasi akibat pengambilan r benda dari n benda berbeda adalah :

$$n\,\mathrm{Pr} = P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Contoh:

Berapa banyak susunan pengurus yang terdiri dari ketua,sekretaris dan bendahara dapat dibentuk dari 6 orang calon?

Banyak susunan pengurus adalah: $P(6,3) = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = \frac{6.5.4.3!}{3!} = 120$

Permutasi

Banyak permutasi berbeda dari n benda yang berbeda yang disusun dalam suatu lingkaran adalah : $(n-1)!$

Contoh:

Berapa banyak susunan bila 4 orang pemain kartu bridge duduk secara melingkar?

Dengan memandang 1 pemain dalam posisi tetap,banyak susunan duduk adalah:

$(4-1)! = 3! = 6$

Permutasi

Banyak permutasi berbeda dari n benda yang $n_1$diantaranya berjenis pertama, n_2 berjenis kedua, ..., n_k berjenis ke-k adalah :

$$\binom{n}{n_1 \quad n_2 \quad \cdots \quad n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

Contoh:

Berapa banyak susunan berbeda rangkaian lampu hias dari 2 lampu merah, 2 kuning dan 3 biru?

$$\binom{7}{2 \quad 2 \quad 3} = \frac{7!}{2!2!3!}$$

Kombinasi

Kombinasi adalah suatu pengambilan r benda dari n benda tanpa memperhatikan urutannya.

Banyak kombinasi r benda dari n benda berbeda adalah:

$$ {}_{n}C_{r} = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} $$

Banyaknya susunan pengurus yang terdiri dari 3 orang dapat disusun dari 6 orang

calon :

$$ {}_{6}C_{3} = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6.5.4.3!}{3!3.2.1} = 20 $$

Marjinal,union,joint,dan Conditional Probabilitas

Marginal Probability:P(A) = probabilitas bahwa A terjadi

*Union Probability:*P(A$\cup$B) = probabilitas bahwa A atau B terjadi

*Joint Probability:*P(AB)=probabilitas bahwa A dan B terjadi

*Conditional Probability:*P(A|B)=probabilitas bahwa A terjadi apabila diketahui B telah terjadi

Aturan Penjumlahan & Perkalian

Aturan umum penjumlahan:

$$P(X \cup Y) = P(X) + P(Y) - P(X \cap Y)$$

Aturan khusus penjumlahan:Bila X dan Y saling lepas/asing (*mutually exclusive*), maka

$$P(X \cup Y) = P(X) + P(Y)$$

Aturan umum perkalian:

$$P(X \cap Y) = P(X)\ P(Y|X) = P(Y)\ P(X|Y)$$

Aturan khusus perkalian:Bila X dan Y kejadian yang independen, maka

$$P(X \cap Y) = P(X) * P(Y)$$

Aturan untuk Probabilitas Bersyarat (*Conditional Probability*)

Probabilitas bahwa X terjadi apabila diketahui Y telah terjadi:

$$P(X \mid Y) = \frac{P(X \cap Y)}{P(Y)} = \frac{P(X)P(Y \mid X)}{P(Y)}$$

Contoh 1

Di sebuah kota, diketahui bahwa : 41% penduduk punya sepeda motor, 19% punya sepeda motor dan mobil, 22% punya mobil. Berdasarkan data di atas, tentukan:

1. Apakah kepemilikan sepeda motor dan mobil tersebut independen?
2. Bila seorang penduduk kota tersebut diambil secara acak, berapa probabilitas bahwa ia punya sepeda motor dan tidak punya mobil?
3. Bila seorang penduduk di kota tersebut diambil secara acak dan diketahui ia memiliki mobil, berapa probabilitas bahwa ia tidak memiliki sepeda motor?
4. Bila seorang penduduk di kota tersebut diambil secara acak, berapakah probabilitas bahwa ia tidak memiliki sepeda motor dan tidak memiliki mobil?

Penyelesaian

Bila S=punya sepeda motor, M=punya mobil

$P(S)=0,41$; $P(SM)=0,19$ dan $P(M)=0,22$

1. S dan M independen jika dan hanya jika $P(S)P(M)=P(SM)$

   $P(S)P(M)=(0,22)(0,41)=0,0902\neq P(SM)$

   Berarti kepemilikan sepeda motor dan kepemilikan mobil di kota tersebut TIDAK independen

2. $P(SM^c)=P(S) - P(SM)=0,41 - 0,19=0,22$

3. P(S^c|M)= $$\frac{P(S^c \cap M)}{P(M)} = \frac{P(M) - P(M \cap S)}{P(M)}$$

$$= \frac{0{,}22 - 0{,}19}{0{,}22} = 0{,}1364$$

4. P(S^{c}M^c)= 1 – P(S) – P(MS^c)

=1 – 0,41- 0,03 = 0,56

Contoh 2

Tiga anggota suatu koperasi dicalonkan menjadi ketua. Probabilitas Ali terpilih 0,3; probabilitas Badu terpilih 0,5; sedang probabilitas Cokro terpilih 0,2. Jika Ali terpilih, maka peluang kenaikan iuran koperasi 0,8; jika Badu terpilih, peluang kenaikan iuran 0,1 dan jika Cokro terpilih, peluang kenaikan iuran aalah 0,4. Bila seseorang merencanakan masuk menjadi anggota koperasi, tetapi menundanya beberapa minggu dan kemudian beberapa minggu dan mengetahui bahwa iuran telah naik. Tentukan peluang bahwa Cokro terpilih jadi ketua?

Penyelesaian

Dalam persoalan ini, misalkan :

A1	: Ali yang terpilih
A2	: Badu yang terpilih
A3	: Cokro yang terpilih
B	: orang yang menaikkan iuran

Maka :

$$P(A_3 \mid B) = \frac{P\left(A_3 \cap B\right)}{P(B)}$$

$$= \frac{P\left(A_3 \cap B\right)}{\sum_{j=1}^{3} P(A_j \cap B)}$$

$$= \frac{P(B \mid A_3).P(A_3)}{P(B \mid A_1).P(A_1) + P(B \mid A_2).P(A_2) + P(B \mid A_3).P(A_3)}$$

$$= \frac{(0{,}4)(0{,}2)}{(0{,}8)(0{,}3) + (0{,}1)(0{,}5) + (0{,}4)(0{,}2)}$$

$$= \frac{0{,}08}{0{,}24 + 0{,}05 + 0{,}08} = \frac{0{,}08}{0{,}37} = \frac{8}{37}$$

Ekspektasi (Nilai Harapan)

Definisi

Misalkan X variabel random dengan fungsi probabilitas f(x). Ekspektasi dari X didefinisikan sebagai :

$$E(X) = \begin{cases} \sum x_j P(x_j) & ;\text{X diskrit} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)dx & ;\text{X kontinu} \end{cases}$$

Ekspektasi X sering diberi simbol μ atau μ_X

Sifat-sifat Ekspektasi

Jika g dan h fungsi-fungsi dari variabel random X, maka :

a. $E(c) = c$, untuk c konstanta

b. $E(c\, g(x)) = c\, E(g(x))$

c. $E(c\, g(x)+d\, h(x)) = c\, E(g(x))+d\, E(h(x))$

d. $E(c\, g(x)+d) = c\, E(g(x))+d$

e. Jika $g(x) \leq h(x)$ maka $E(g(x)) \leq E(h(x))$