

Distribusi Peluang

EGI SAFITRI, S.MAT., M.SI

Pendahuluan

Probabilitas sangat dibutuhkan, karena kebenaran dari suatu kesimpulan yang dibuat dari analisis data sebetulnya tidak dapat dipastikan benar secara absolut, disebabkan data berdasarkan dari sampel. Fungsi distribusi peluang pada umumnya dibedakan atas distribusi peluang diskrit dan distribusi peluang kontinu

Distribusi Probabilitas Diskrit

- Bernoulli/Binomial
- Poisson
- Hipergeometrik

Distribusi Probabilitas Kontinu

- Normal (Z, t, Chi-Square, dll)

Distribusi Peluang Binomial

BI dalam kata **BINOMIAL** berarti dua. Hal ini merujuk ke setiap kali percobaan atau kesempatan, hasil yang **MUNGKIN** muncul hanya ada dua.

Pertanyaan yang biasanya muncul adalah, kapan kita menggunakan menghitung peluang dengan menggunakan persamaan distribusi peluang Binomial? Jika kejadian tersebut memenuhi sifat-sifat di bawah ini maka ketika menghitung peluang kejadian tersebut terjadi maka persamaan yang digunakan adalah persamaan peluang dari distribusi binomial.

Distribusi Peluang Binomial

1. Distribusi binomial adalah distribusi probabilitas statistik yang merangkum kemungkinan bahwa suatu nilai akan mengambil salah satu dari dua nilai independen di bawah satu set parameter atau asumsi yang diberikan.
2. Asumsi dasar dari distribusi binomial adalah bahwa hanya ada satu hasil untuk setiap percobaan, bahwa setiap percobaan memiliki probabilitas keberhasilan yang sama, dan bahwa setiap percobaan saling eksklusif atau independen satu sama lain.
3. Distribusi binomial adalah distribusi diskrit umum yang digunakan dalam statistik, berbeda dengan distribusi kontinu, seperti distribusi normal.

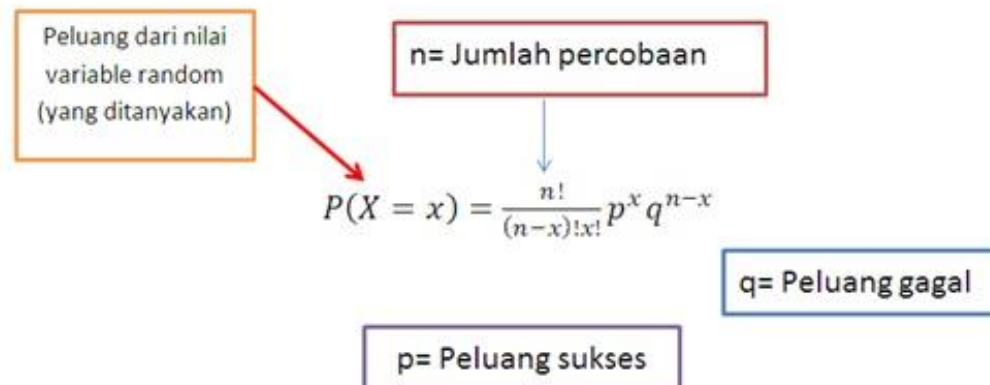
Distribusi Peluang Binomial

1. Percobaan dilakukan sebanyak n kali.
2. Setiap kali percobaan mempunyai dua kemungkinan hasil.
3. Kemungkinan hasil dari masing-masing percobaan sama.
4. Hasil yang diperoleh pada percobaan pertama tidak akan mempengaruhi hasil yang diperoleh pada percobaan-percobaan yang lain (saling independen).

Distribusi Peluang Binomial

Untuk persamaan hitung peluang dapat dilihat sebagai berikut. Misalkan X adalah variabel random diskrit. Maka peluang dari X adalah:

$$P(X) = \frac{n!}{(n-x)!x!} p^x q^{n-x}$$



Distribusi Peluang Binomial

- Jika
 - variabel hanya memiliki 2 kemungkinan hasil
 - probabilitas (peluang) kedua hasil tersebut tidak berubah (tetap) apapun hasil eksperimen sebelumnya



- Probabilitas hasil suatu distribusi binomial
 - $\text{prob}(\text{sukses}) = p$
 - $\text{probabilitas}(\text{gagal}) = q = 1 - p$

Contoh

- Peluang sukses (S) dalam suatu eksperimen adalah $p \rightarrow \text{prob}(S) = p$
- Peluang gagal (G) adalah $q = 1 - p \rightarrow \text{prob}(G) = q$
- 1x eksperimen:
 - peluang sukses p
 - peluang gagal q
- 2x eksperimen:
 - peluang sukses kemudian sukses (S,S): pp
 - peluang sukses kemudian gagal (S,G): pq
 - peluang gagal kemudian sukses (G,S): qp
 - peluang gagal kemudian gagal (G,G): qq

Sukses-gagal 2x Percobaan

Jumlah sukses	Cara sukses	Jumlah cara sukses	Probabilitas
2	SS	1	pp $1p^2q^0$
1	SG atau GS	2	$pq + qp$ $2p^1q^1$
0	GG	1	qq $1p^0q^2$

Sukses-gagal 3x Percobaan

Jumlah sukses	Cara sukses	Jumlah cara sukses	Probabilitas
3	SSS	1	$1 ppp$ $1 p^3q^0$
2	SSG, SGS, GSS	3	$3 ppq$ $3 p^2q^1$
1	SGG, GSG, GGS	3	$3 pqq$ $3 p^1q^2$
0	GGG	1	$1 qqq$ $1 p^0q^3$

Sukses-Gagal

- 3x eksperimen:
 - peluang sukses pada eksperimen ke-3: qqp
 - peluang sukses di salah satu eksperimen: $pqq + qpq + qqp$
- 5x eksperimen:
 - peluang sukses 2x: $ppqqq + pqpqq + \dots + qqppp$

$$\binom{5}{2} p^2 q^3 = 10p^2 q^3$$

Contoh

Misalkan kita mempunyai satu buah koin yang terdiri atas dua sisi, depan dan belakang.

Misalkan kita mengundi sebanyak 10 kali. Pada undian pertama, kemungkinan hasilnya

hanya sisi depan atau sisi belakang. Pada undian kedua, kemungkinan hasilnya hanya sisi

depan atau sisi belakang. Demikian seterusnya. Setiap kali mengundi, kemungkinan

hasilnya sama, hanya dua yaitu sisi depan atau sisi belakang. Dari sepuluh kali percobaan,

berapa peluang sisi depan muncul sebanyak dua kali?

Contoh

Diketahui:

Jumlah percobaan = $n = 10$.

Peluang sukses = peluang munculnya sisi depan dalam setiap percobaan = $p = 0.5$.

Peluang gagal = peluang tidak munculnya sisi depan dalam setiap percobaan = $q = 1 - p = 0.5$.

Ditanyakan:

Dari sepuluh kali percobaan, berapa peluang sisi depan muncul sebanyak dua kali? Atau $P(X = 2) \rightarrow$ Yang ditanyakan adalah peluang munculnya sisi depan maka kejadian yang dianggap sukses adalah jika sisi depan muncul ketika diundi.

Jawaban:

$$P(X = 2) = \frac{10!}{(10 - 2)! 2!} (0.5)^2 (1 - 0.5)^{10 - 2} = 0.0439$$

Latihan

- Suatu PDAM menemukan fakta bahwa risiko (probabilitas) terjadi problem pasokan air macet pada suatu hari adalah 7%.
- Dengan pendekatan distribusi binomial, hitunglah:
 - risiko terjadi 2 hari macet dalam satu bulan (30 hari)
 - risiko terjadi paling tidak terjadi 2 hari macet dalam satu bulan (30 hari)
 - peluang pasokan air lancar sepanjang satu bulan alias tidak pernah macet selama 30 hari

Distribusi Peluang Multinomial

Distribusi **multinomial** secara khusus menangani peristiwa yang memiliki **banyak hasil yang berbeda** . Distribusi **Binomial** adalah bagian spesifik dari distribusi multinomial yang hanya memiliki **dua kemungkinan hasil suatu kejadian**.

Distribusi multinomial tidak terbatas pada peristiwa yang hanya mempunyai hasil yang berbeda. Dimungkinkan untuk mengkategorikan hasil dengan distribusi berkelanjutan pada derajat yang berbeda-beda (tinggi, sedang, rendah). Misalnya, ketinggian air - suatu kesatuan yang berkesinambungan - dalam tangki penyimpanan dapat dibuat terpisah dengan mengelompokkannya menjadi "**diinginkan**" atau "**tidak diinginkan**". Oleh karena itu, distribusi multinomial memiliki aplikasi yang luas dalam pengendalian proses.

Distribusi Peluang Multinomial

Percobaan binomial yang telah kita bahas sebelumnya merupakan suatu percobaan yang menghasilkan dua kemungkinan hasil yakni 'sukses' dan 'gagal'. Percobaan binomial ini akan menjadi percobaan multinomial bila tiap percobaan dapat memberikan lebih dari 2 hasil yang mungkin.

Percobaan Multinomial

Percobaan binomial akan menjadi percobaan multinomial jika tiap usaha dapat memberikan lebih dari 2 hasil yang mungkin. Misalnya hasil produksi pabrik dapat dikelompokkan menjadi barang baik, cacat, dan masih bisa diperbaiki.

Bila suatu usaha dapat menghasilkan k macam hasil E_1, E_2, \dots, E_k Dengan probabilitasnya p_1, p_2, \dots, p_k maka distribusi perubah acak X_1, X_2, \dots, X_k yang menyatakan banyaknya kejadian E_1, E_2, \dots, E_k Dalam n -usaha bebas adalah

$$f(x_1, x_2, \dots, x_k; p_1, p_2, \dots, p_k, n) = \binom{n}{x_1, x_2, \dots, x_k} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \dots p_k^{x_k}$$

Dengan $\sum_{i=1}^k x_i = n$ dan $\sum_{i=1}^k p_i = 1$

Contoh

Dua buah dadu dilantunkan 6 kali, berapa probabilitas akan mendapatkan jumlah 7 atau 11 muncul dua kali, sepasang bilangan yang sama satu kali, dan kombinasi lainnya 3 kali?

Jawab:

Misal: E1= muncul jumlah 7 atau 11 → $p(E1)=2/9$

E2= muncul pasangan bilangan yang sama → $p(E2)=1/6$

E3= muncul selain E1 maupun E2 → $p(E3)=11/18$

Nilai inisial tidak berubah dari ke6-usaha. Menggunakan distribusi multinomial dengan $x_1=2$, $x_2=1$ dan $x_3=3$ diperoleh:

$$\begin{aligned} f(2,1,3; \frac{2}{9}, \frac{1}{6}, \frac{11}{18}, 6) &= \binom{6}{2,1,3} \left(\frac{2}{9}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{11}{18}\right)^3 \\ &= \frac{6!}{2!1!3!} \frac{4}{81} \frac{1}{6} \frac{11^3}{18^3} = 0.1127 \end{aligned}$$

Distribusi Hipergeometrik

Distribusi Hipergeometrik tidak sesulit kedengarannya pada awalnya. Ini pada dasarnya adalah kerangka distribusi probabilitas diskrit. Distribusi ini menggambarkan kemungkinan tercapainya sejumlah keberhasilan tertentu dalam serangkaian pengambilan dari populasi terbatas tanpa pengembalian.

Definition

Sebuah "kesuksesan" dalam konteks ini berarti suatu objek atau hasil yang memiliki ciri tertentu yang menarik.

Perbedaan diantara distribusi binomial dan distribusi hipergeometrik

- adalah terletak pada cara penarikan sampel.
- Dalam **distribusi binomial** diperlukan sifat pengulangan yang saling bebas, dan pengulangan tersebut harus dikerjakan dengan pengulangan (*with replacement*).
- Sedangkan untuk **distribusi hipergeometrik** tidak diperlukan sifat pengulangan yang saling bebas dan dikerjakan tanpa pengulangan (*without replacement*).

Penerapan untuk distribusi hipergeometrik

Ditemukan dalam berbagai bidang, dan paling sering digunakan dalam penarikan sampel penerimaan barang, pengujian elektronik, jaminan mutu, dsb.

Dalam banyak bidang ini, pengujian dilakukan terhadap barang yang diuji yang pada akhirnya barang uji tersebut menjadi rusak, sehingga tidak dapat dikembalikan. Jadi, pengambilan sampel harus dikerjakan tanpa pengembalian

Distribusi Hipergeometrik

Distribusi Hipergeometri:

$$P(X = k) = \frac{C(K, k)C(N - K, n - k)}{C(N, n)}$$

Rumus yang diberikan menghitung kemungkinan keberhasilan 'k' (hasil yang diinginkan) dalam penarikan 'n', tanpa pengembalian, dari populasi terbatas berukuran 'N' yang berisi objek 'K' dengan fitur tersebut, dimana 'C' menunjukkan koefisien binomial.

Distribusi Hipergeometrik

Distribusi probabilitas perubah acak hipergeometrik X yang menyatakan banyaknya kesuksesan dalam sampel acak dengan ukuran n yang diambil dari N -obyek yang memuat k sukses dan $N-k$ gagal dinyatakan sebagai:

$$h(x;N,n,k) = \frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}} ; x = 0,1,2,\dots,n$$

Contoh

Suatu panitia 5 orang dipilih secara acak dari 3 kimiawan dan 5 fisikawan. Hitung distribusi probabilitas banyaknya kimiawan yang duduk dalam panitia.

Jawab:

Misalkan: $X =$ menyatakan banyaknya kimiawan dalam panitia.

$$X = \{0, 1, 2, 3\}$$

Distribusi probabilitasnya dinyatakan dengan rumus

$$h(x; 8, 5, 3) = \frac{\binom{3}{x} \binom{5}{5-x}}{\binom{8}{5}} \quad ; \quad x = 0, 1, 2, 3$$

$$x = 0 \rightarrow h(0; 8, 5, 3) = \frac{\binom{3}{0} \binom{5}{5}}{\binom{8}{5}} = \frac{1}{56} \quad ; \quad x = 2 \rightarrow h(2; 8, 5, 3) = \frac{\binom{3}{2} \binom{5}{3}}{\binom{8}{5}} = \frac{30}{56}$$

$$x = 1 \rightarrow h(1; 8, 5, 3) = \frac{\binom{3}{1} \binom{5}{4}}{\binom{8}{5}} = \frac{15}{56} \quad ; \quad x = 3 \rightarrow h(3; 8, 5, 3) = \frac{\binom{3}{3} \binom{5}{2}}{\binom{8}{5}} = \frac{10}{56}$$

Tabel 5.6 Distribusi hipergeometrik

x	0	1	2	3
$h(x; 8, 5, 3)$	$\frac{1}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{30}{56}$	$\frac{10}{56}$

Teorema.

Distribusi hipergeometrik $h(x;N,n,k)$ mempunyai rata-rata dan variansi sbb:

$$\mu = \frac{nk}{N} \quad \text{dan} \quad \sigma^2 = \frac{N-n}{N-1} (n) \left(\frac{k}{n}\right) \left(1 - \frac{k}{n}\right)$$

Contoh (5.9)

Tentukan mean dan variansi dari contoh (5.8) kemudian gunakan teorema chebyshev untuk menafsirkanselang $\mu \pm 2\sigma$

Jawab:

Dari contoh 5.8 diketahui $n=15$ dan $p=0.4$

$$\text{Diperoleh } \mu = \frac{(5)(3)}{40} = \frac{3}{8} = 0,375 \quad \text{dan} \quad \sigma^2 = \left(\frac{40-5}{39}\right)(5) \left(\frac{3}{40}\right) \left(1 - \frac{3}{40}\right) = 0,3113$$

Menggunakan teorema Chebyshev $\mu \pm 2\sigma$ adalah

$$\mu + 2\sigma = 1,491 \quad \text{dan} \quad \mu - 2\sigma = -0,741$$

Jadi, selang yang ditanyakan adalah dari -0,741 sampai 1,491

Contoh

Suatu pabrik ban mempunyai data bahwa dari pengiriman sebanyak 5000 ban ke sebuah toko tertentu terdapat 1000 cacat. Jika ada seseorang membeli 10 ban ini secara acak dari toko tersebut, berapa probabilitasnya memuat tepat 3 yang cacat.

Jawab:

Karena $n=10$ cukup kecil dibandingkan $N=5000$, maka probabilitasnya dihipotesiskan dengan binomial dengan $p= 10/5000= 0,2$ adalah probabilitas mendapat satu ban. Jadi probabilitas mendapat tepat 3 ban cacat:

$$\begin{aligned}h(3;5000,10,1000) &= b(3;10,0.2) \\ &= \sum_{x=0}^3 b(x;10,0.2) - \sum_{x=0}^2 b(x;10,0.2) \\ &= 0,8791 - 0,6778 \\ &= 0,2013\end{aligned}$$