

Distribusi Peluang

EGI SAFITRI, S.MAT., M.SI

Distribusi Poisson

- Distribusi Poisson adalah distribusi probabilitas diskrit untuk terjadinya beberapa peristiwa selama interval waktu tertentu.
- Variabel acak x adalah jumlah kemunculan peristiwa dalam suatu interval, yang bisa berupa waktu, jarak, luas, volume, jumlah hitungan, dll.
- Sering digunakan untuk menentukan peluang sebuah peristiwa yang dalam kesempatan tertentu diharapkan untuk sangat jarang terjadi.

- jumlah terjadinya shut down suatu pabrik dalam setahun
- jumlah cacat (flaws) dalam satuan luas kaca lembaran
- banyaknya bakteri dalam 1 liter air.

Syarat Distribusi Poisson

Distribusi Poisson memiliki persyaratan berikut:

- Variabel acak x adalah jumlah kemunculan suatu peristiwa selama beberapa interval.
- Kejadian harus acak.
- Kejadian harus independen satu sama lain.
- Kejadian harus didistribusikan secara seragam selama interval yang digunakan

Persamaan Distribusi Poisson

- The Poisson distribution is represented by the following equation:

$$P(x) = \frac{\mu^x \cdot e^{-\mu}}{x!}$$

dengan parameter:

μ = rata-rata (mean) → sering juga ditulis dengan λ

x = jumlah kemunculan suatu peristiwa selama beberapa interval

e = basis logaritma natural ($e = 2,71828\dots$)

Standar deviasi = $\sigma = \sqrt{\mu}$.

Poisson dan Binomial

1. Distribusi binomial dipengaruhi oleh ukuran sampel **n** dan probabilitas **p**, sedangkan distribusi Poisson hanya dipengaruhi oleh mean **m**.
2. Dalam distribusi binomial, nilai yang mungkin dari variabel acak **x** adalah 0, 1, . . . , n, sedangkan distribusi Poisson memiliki kemungkinan nilai **x** adalah 0, 1, 2, . . . , tanpa batas atas.

-
- Jika dalam distribusi binomial kadang nilai N cukup besar, namun peluang terjadinya A sangat kecil, sehingga dapat dilakukan pendekatan dengan distribusi Poisson.
 - Contohnya ketika dua kondisi terpenuhi:
 - **$N \geq 50$, sedangkan $np < 5$**
 - Pendekatan dengan distribusi binomial, maka:

$$\mu = np$$

Contoh

- Sebuah konveksi pakaian menggunakan 20 mesin jahit. Probabilitas sebuah mesin jahit mengalami dan memerlukan perbaikan adalah 0,02.
- Tentukan probabilitas dari 3 mesin yang akan mengalami gangguan dan memerlukan perbaikan.

$$\mu = n \cdot p = 20 \cdot 0,02 = 0,40$$

$$x = 3$$

$$P(x = 3) = \frac{\mu^x \cdot e^{-\mu}}{x!} = \frac{0,40^3 \cdot e^{-0,40}}{3!} = 0,00715$$

Contoh

Sebuah toko alat-alat listrik mencatat rata-rata penjualan lampu R 40 W setiap hari 5 buah. Jika permintaan akan lampu tersebut mengikuti distribusi Poisson, berapa probabilitas untuk penjualan berikut?

a) 2 lampu R

b) 4 lampu R

$$\mu = 5$$

$$x = 2 \rightarrow P(x = 2) = \frac{\mu^x \cdot e^{-\mu}}{x!} = \frac{5^2 \cdot e^{-5}}{2!} = 0,084$$

$$x = 4 \rightarrow P(x = 2) = \frac{\mu^x \cdot e^{-\mu}}{x!} = \frac{5^4 \cdot e^{-5}}{4!} = 0,175$$

Penting untuk menggunakan unit yang konsisten dalam perhitungan probabilitas, mean, dan varian yang melibatkan variabel acak Poisson.

Contoh:

- If the average number of flaws per millimeter of wire is 3.4,
- then the average number of flaws in 10 millimeters of wire is 34, and
- the average number of flaws in 100 millimeters of wire is 340.

Jika variabel acak Poisson mewakili jumlah hitungan dalam beberapa interval, rata-rata variabel acak harus sama dengan jumlah yang diharapkan (mean) dalam panjang interval yang sama.

Contoh

Terdapat data kasus cacat yang ditemukan pada produk kawat tembaga tipis. Anggaplah bahwa jumlah cacat mengikuti distribusi Poisson dengan rata-rata 2,3 cacat per milimeter.

Tentukan probabilitas tepat 2 cacat dalam 1 milimeter kawat.

$$\mu = 2,3$$

$$x = 2 \rightarrow P(x = 2) = \frac{\mu^x \cdot e^{-\mu}}{x!} = \frac{2,3^2 \cdot e^{-2,3}}{2!} = 0,265$$

Tentukan probabilitas kejadian 10 cacat dalam 5 milimeter kawat.

X menunjukkan jumlah cacat dalam 5 milimeter kawat.

X memiliki distribusi Poisson.

$$\mu = n \cdot p = 5 \text{ mm} \cdot 2,3 \frac{\text{cacat}}{\text{mm}} = 11,5 \text{ cacat}$$

$$x = 10 \rightarrow P(x = 10) = \frac{\mu^x \cdot e^{-\mu}}{x!} = \frac{11,5^{10} \cdot e^{-11,5}}{10!} = 0,113$$

Contoh

Kontaminasi adalah masalah dalam pembuatan disc penyimpanan optik. Jumlah partikel kontaminan pada disc optik memiliki distribusi Poisson, dan jumlah rata-rata partikel per cm^2 permukaan media adalah 0,1. Luas disk yang diteliti adalah 100 cm^2 . Tentukan probabilitas bahwa 12 partikel terjadi di area disk yang sedang diteliti.

→ X menunjukkan jumlah partikel di area disk yang diteliti.

→ Jumlah rata-rata partikel adalah 0,1 partikel per cm^2

$$\mu = n \cdot p = 100 \text{ cm}^2 \cdot 0,1 \frac{\text{partikel}}{\text{cm}^2} = 10 \text{ partikel}$$
$$x = 12 \rightarrow P(x = 12) = \frac{\mu^x \cdot e^{-\mu}}{x!} = \frac{10^{12} \cdot e^{-10}}{12!} = 0,095$$

Persamaan Distribusi Poisson

Standar deviasi = $\sigma = \sqrt{\mu}$.

- Sebagai contoh, jika jumlah partikel mengikuti distribusi Poisson dengan rata-rata 25 partikel per cm^2 , standar deviasi dari perhitungan adalah 5 per cm^2 .

Contoh

Peluang seseorang akan mendapatkan reaksi buruk setelah disuntik besarnya 0,0005. dari 4.000 orang yang disuntik, tentukan peluang yang menderita reaksi buruk:

- a) Tidak ada
- b) Ada 2 orang
- c) Lebih dari 2 orang

a) Tidak ada

$$\mu = n \cdot p = 4000 \cdot 0,0005 = 2$$

$$P(x = 0) = \frac{\mu^x \cdot e^{-\mu}}{x!} = \frac{2^0 \cdot e^{-2}}{0!} = 0,1353$$

b) Ada 2 orang

$$P(x = 2) = \frac{\mu^x \cdot e^{-\mu}}{x!} = \frac{2^2 \cdot e^{-2}}{2!} = 0,2707$$

c) Lebih dari 2 orang $x = 3, 4, \dots, 4000$

Dimana nilai $P(0) + P(1) + P(2) + P(3) + \dots = 1$

Maka $P(3) + P(4) + \dots = 1 - P(0) - P(1) - P(2)$

Dari perhitungan sebelumnya: $P(0) = 0,1353$; $P(2) = 0,2707$; $P(1) = ?$

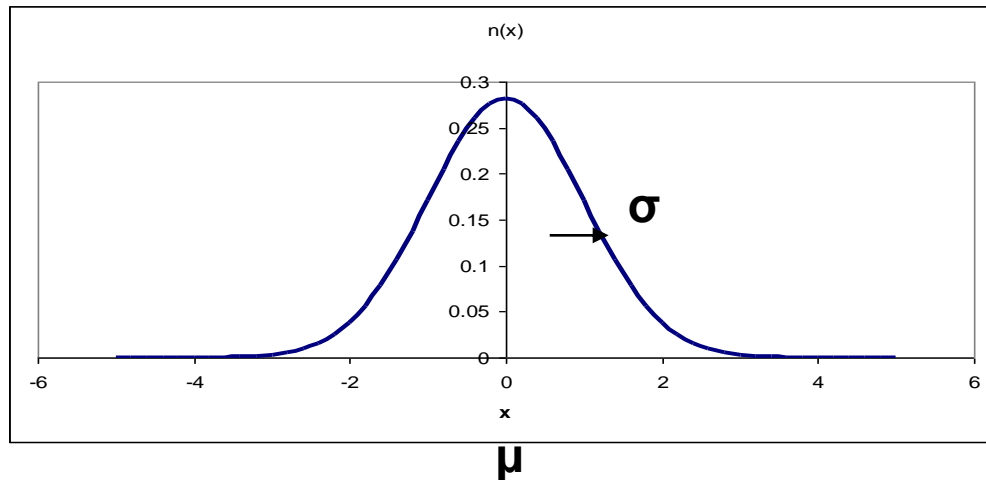
$$P(x = 1) = \frac{\mu^x \cdot e^{-\mu}}{x!} = \frac{2^1 \cdot e^{-2}}{1!} = 0,2706$$

Maka, peluang = $1 - P(0) - P(1) - P(2) = 0,3234$

Distribusi Normal

Distribusi probabilitas yg terpenting dalam statistik adalah distribusi normal atau Gaussian. Fungsi rapat probabilitas variabel random X dengan mean μ dan variansi σ^2 yang memiliki distribusi normal adalah:

$$n(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$$



Distribusi Normal : Sifat

Sifat-Sifat Distribusi Normal:

1. Rata-ratanya (mean) μ dan standard deviasinya = σ
2. Mode (maximum) terjadi di $x=\mu$
3. Bentuknya simetrik terhadap $x=\mu$
4. Titik belok tepat di $x=\mu\pm\sigma$
5. Kurva mendekati nol secara asimptotis semakin x jauh dari $x=\mu$
6. Total luasnya = 1

Sifat Distribusi Normal:

Contoh **variabel random yg memiliki distribusi normal** misalnya:

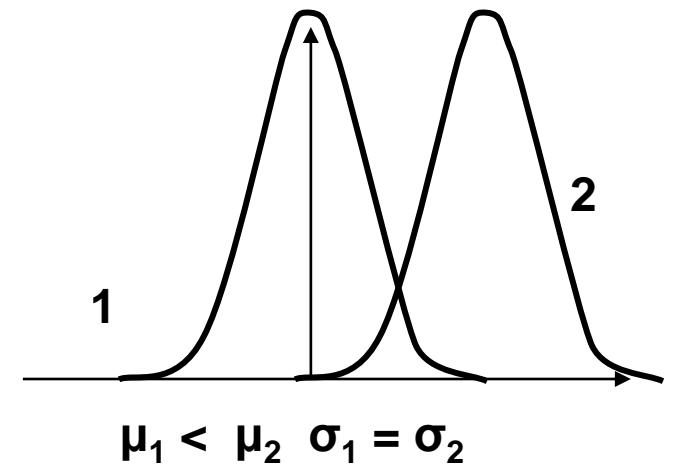
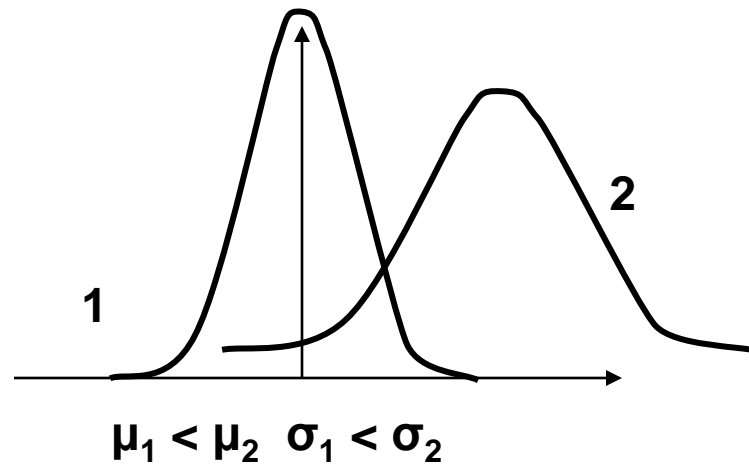
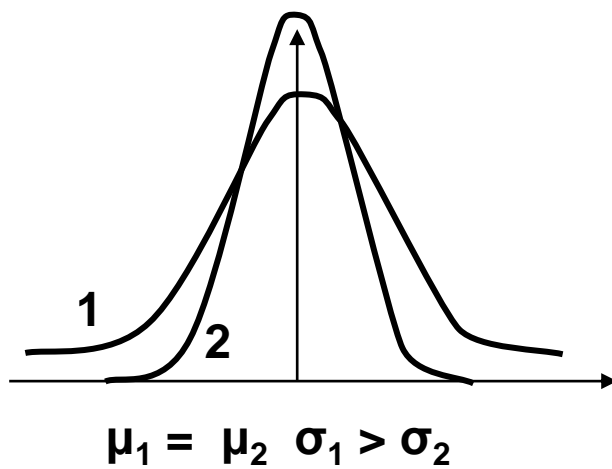
- distribusi error dalam pengukuran
- pengukuran dalam meteorologi
- pengukuran curah hujan
- sebagai pendekatan bagi distribusi binomial dan distribusi hipergeometrik, dan lainnya

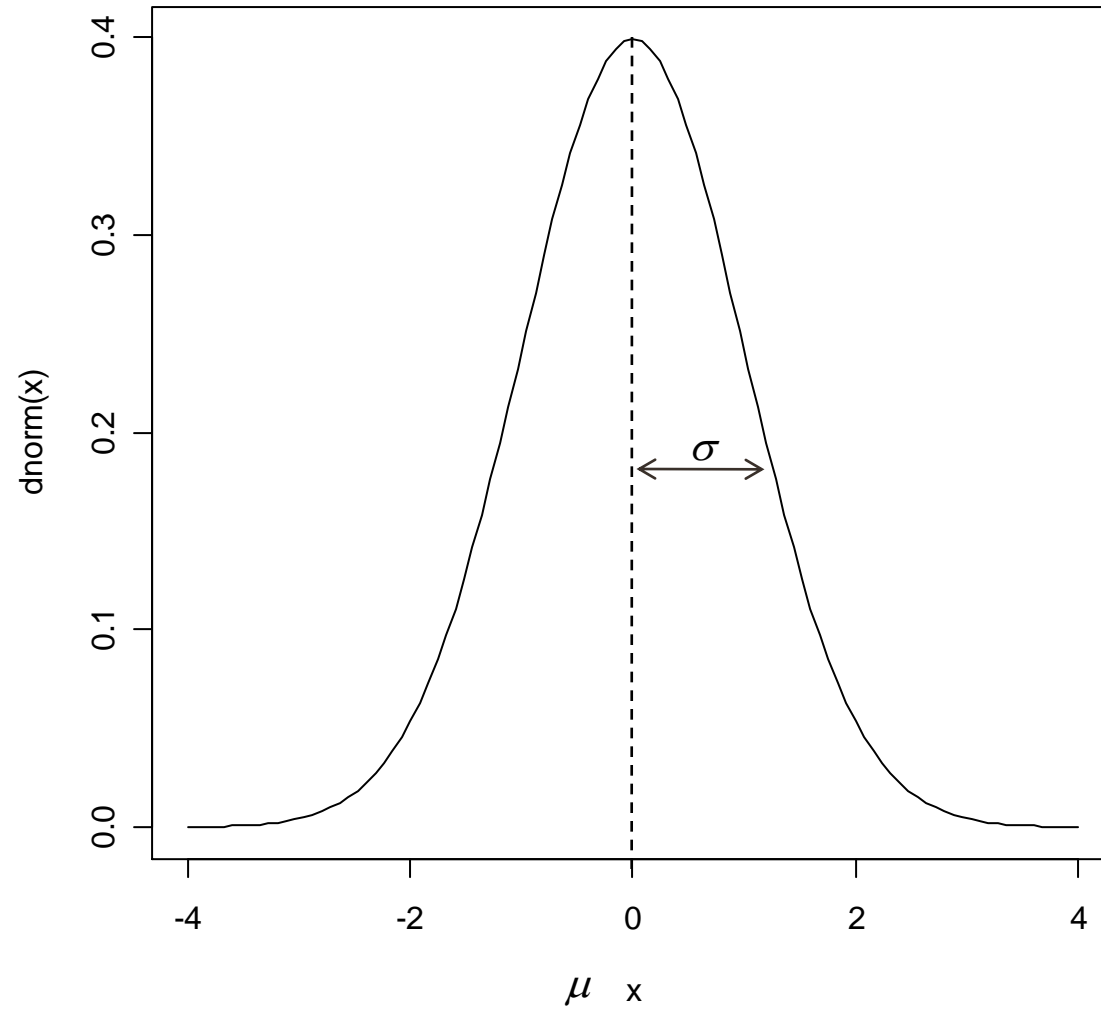
Distribusi Normal:

Mean	μ
Varians	σ^2
Deviasi Standar	σ
Koefisien momen kemiringan	$\alpha_3 = 0$
Koefisien momen kurtois	$\alpha_4 = 3$
Deviasi mean	$\sigma\sqrt{2/\pi} = 0,7979\sigma$

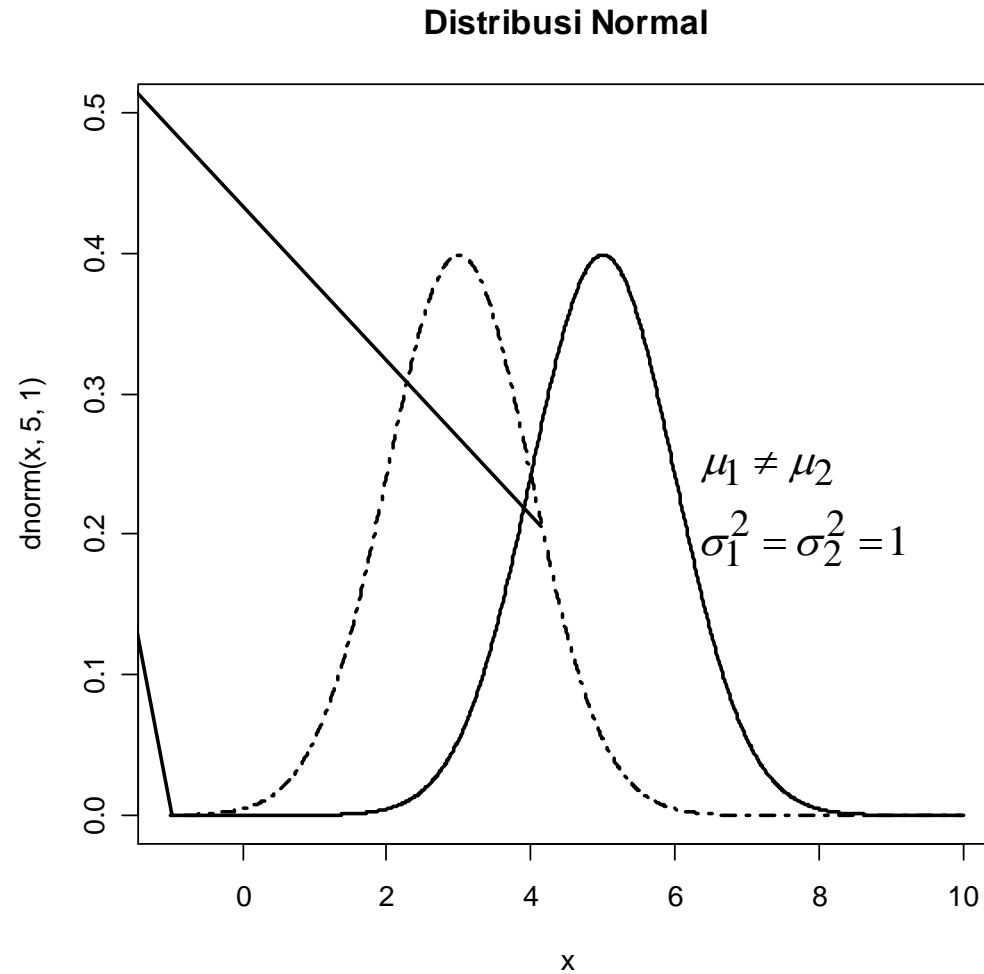
Distribusi Normal : Sifat

Bentuk distribusi normal ditentukan oleh μ dan σ .



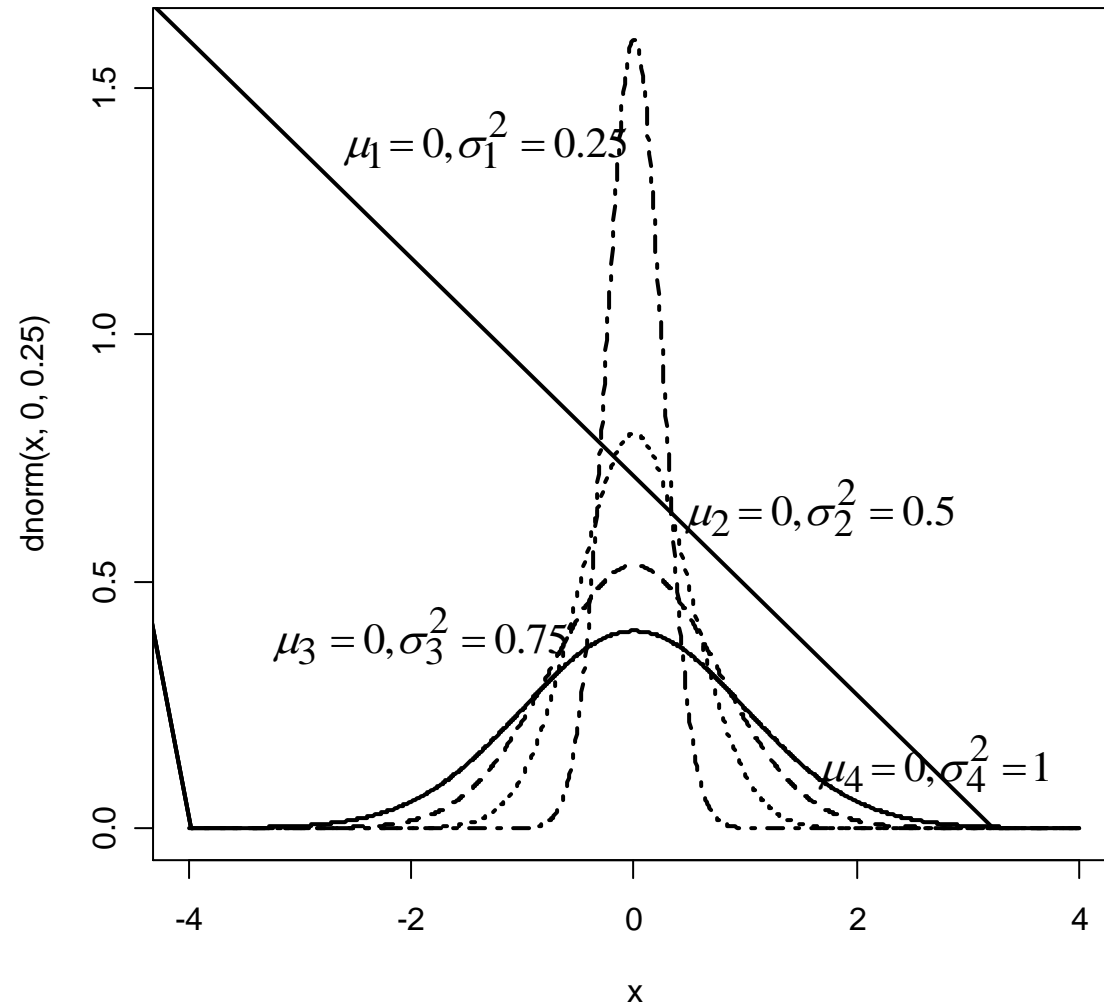


Gambar 6.1 Kurva normal

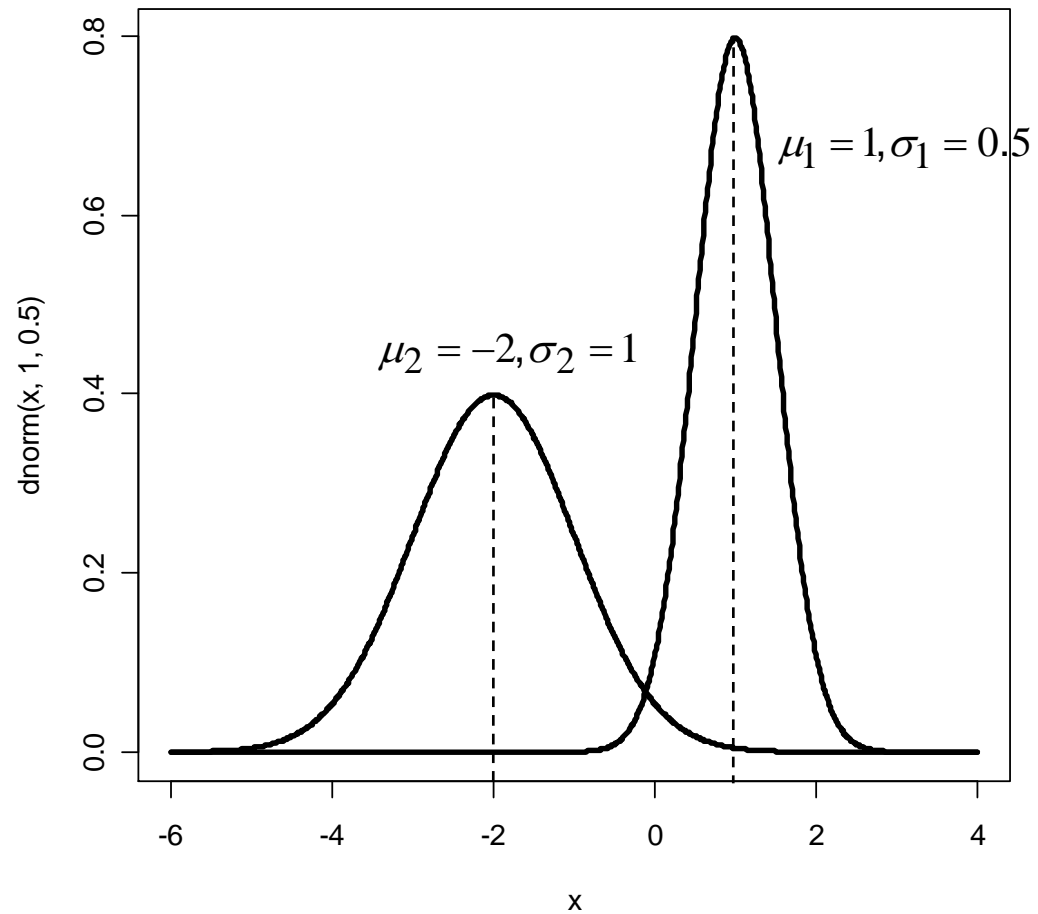


Gambar 6.2 Kurva normal dengan simpangan baku sama

Distribusi Normal



Gambar 6.3 Kurva normal dengan rata-rata sama

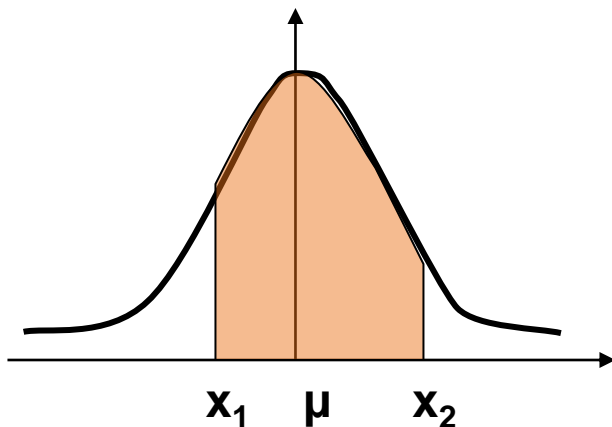


Gambar 6.4 Kurva normal dengan mean dan standart deviasi yang berbeda

Luas di Bawah Kurva dan Probabilitas

$P(x_1 < x < x_2)$ = probabilitas variabel random x memiliki nilai antara x_1 dan x_2

$P(x_1 < x < x_2)$ = luas di bawah kurva normal antara $x=x_1$ dan $x=x_2$



Oleh karena perhitungan integral normal tersebut sulit, maka disusunlah tabel nilai rapat probabilitas. Akan tetapi karena nilai rapat probabilitasnya tergantung pada μ dan σ maka sangatlah tidak mungkin mentabelkan untuk semua nilai μ dan σ

Kurva Distribusi Normal Standard

Distribusi normal standard adalah distribusi normal dengan mean $\mu=0$ dan standard deviasi $\sigma=1$.

Transformasi $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$ memetakan distribusi normal menjadi

distribusi normal standard, sebab distribusi normal dengan variabel z ini memiliki mean $=0$ dan standard deviasi $= 1$.

Transformasi ini juga mempertahankan luas dibawah kurvanya, artinya:

Luas dibawah kurva distribusi normal antara x_1 dan x_2 **=** Luas dibawah kurva distribusi normal standard antara z_1 dan z_2

Dengan $z_1 = (x_1 - \mu) / \sigma$ dan $z_2 = (x_2 - \mu) / \sigma$.

Sehingga cukup dibuat tabel distribusi normal standard kumulatif saja!

- Untuk mengatasi kesulitan menghitung integral.

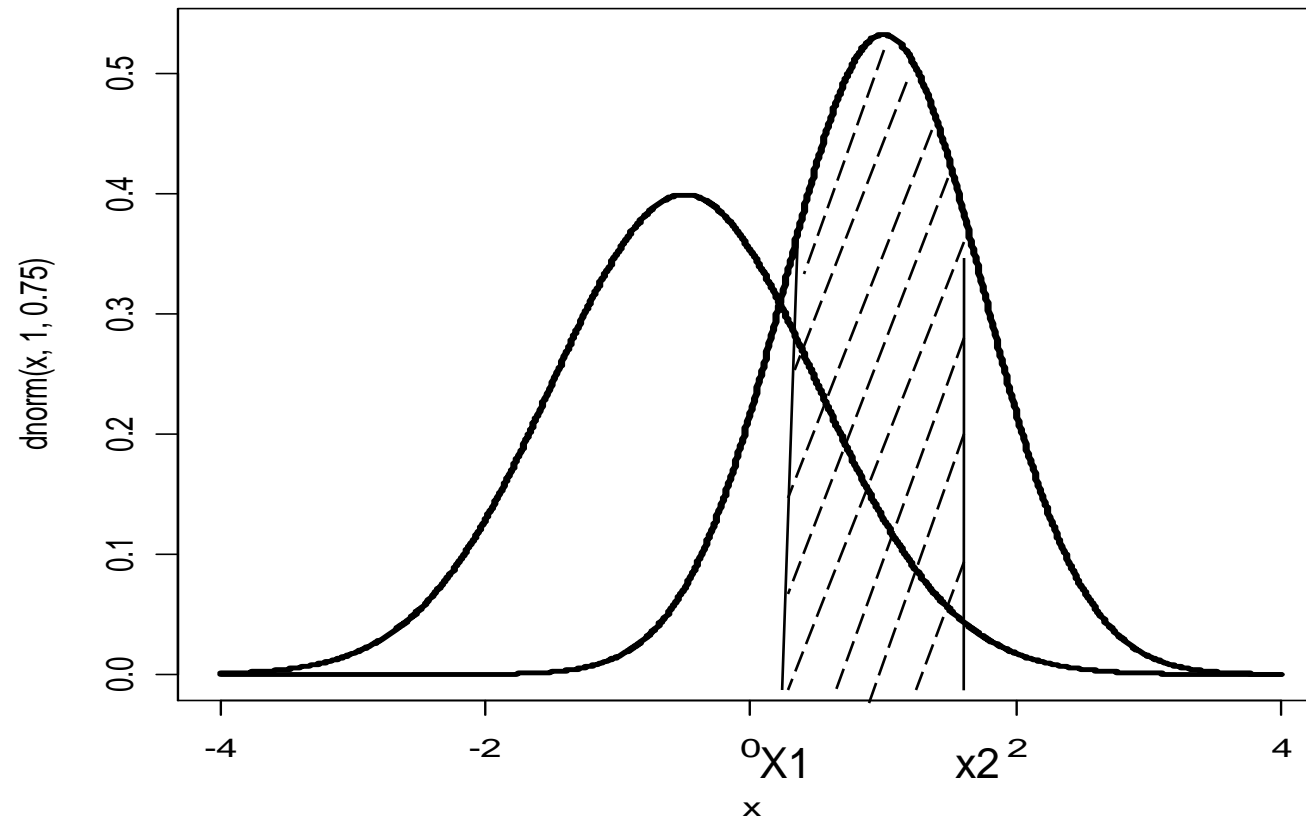
Gunakan tabel distribusi normal standart (Z) yaitu distribusi normal dengan $\mu = 0$ dan $\sigma^2 = 1$

Caranya menggunakan transformasi dengan rumus $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$

Setiap pengamatan perubah acak X dapat ditransformasikan ke perubah acak Z dengan rata-rata 0 dan variansi 1.

Jika X mendapat nilai padananya diberikan oleh $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$. Jadi jika X bernilai $x = x_1$ dan $x = x_2$ maka perubah acak Z akan bernilai $z_1 = \frac{x_1-\mu}{\sigma}$ dan $z_2 = \frac{x_2-\mu}{\sigma}$ kemudian dinyatakan sebagai:

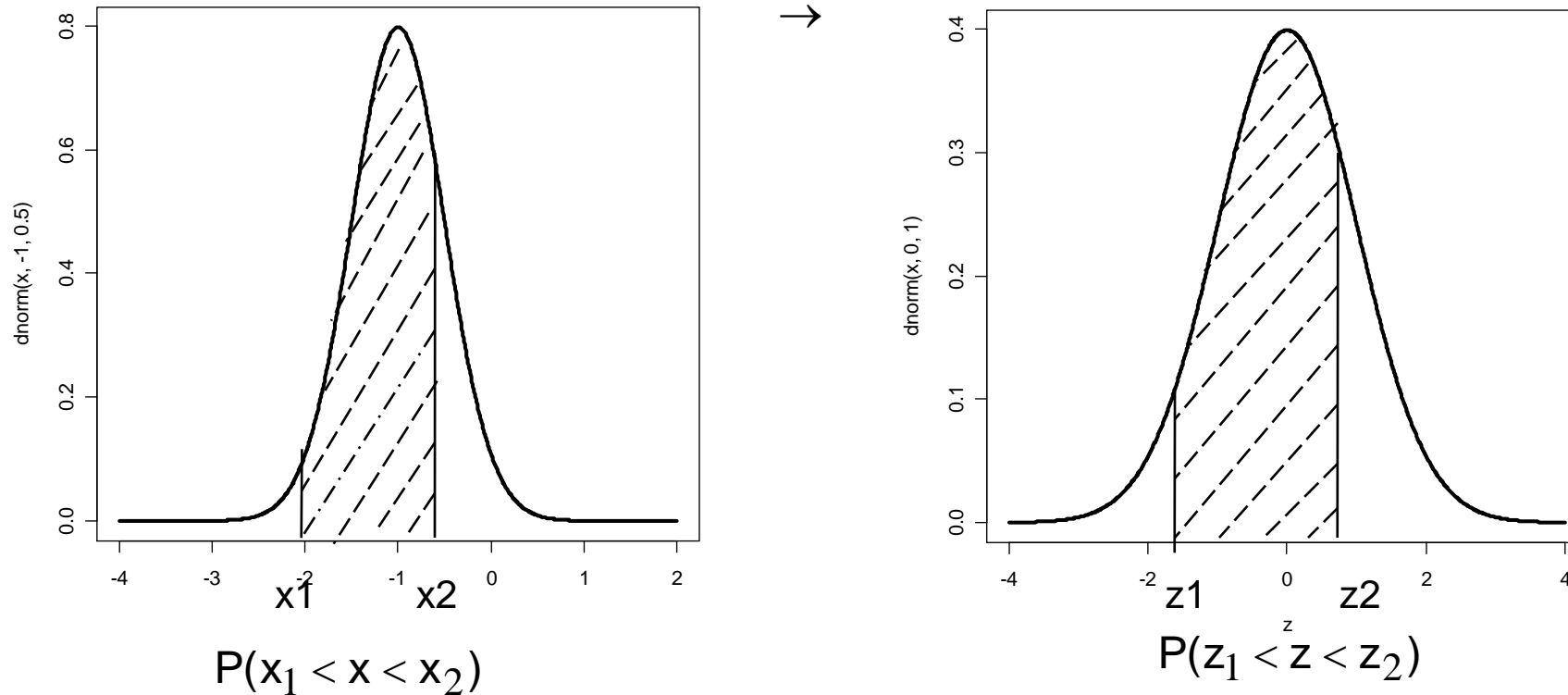
$$\begin{aligned}
 P(x_1 \leq x \leq x_2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{z_1}^{z_2} e^{-\frac{1}{2}(z)^2} dx \\
 &= \int_{z_1}^{z_2} n(z,0,1) dx = P(z_1 < z < z_2)
 \end{aligned}$$



Gambar 6.6 $P(x_1 < x < x_2)$ untuk kurva normal yang berbeda

Definisi (6.1)

Distribusi perubah acak normal dengan rata-rata nol dan variansi 1 disebut distribusi normal baku



Gambar 6.7 Distribusi normal asli dan yang telah ditransformasikan

$$P(x_1 < x < x_2) = P(z_1 < x < z_2)$$

Contoh 6.1

Diketahui suatu distribusi normal dengan $\mu = 50$ dan $\sigma = 10$

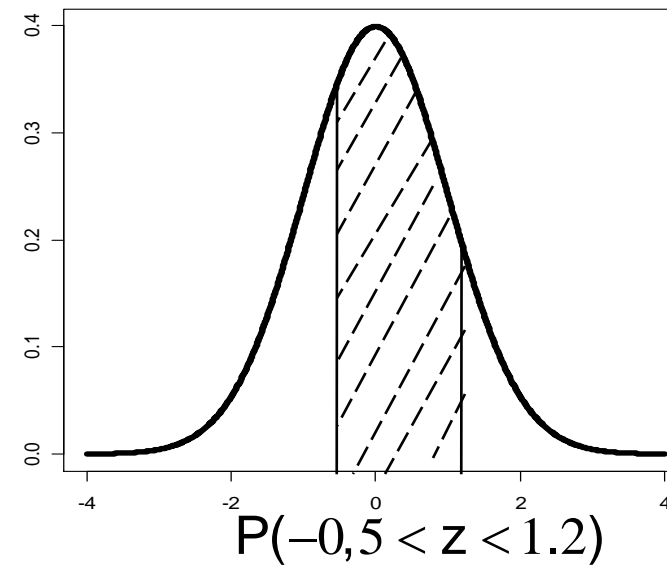
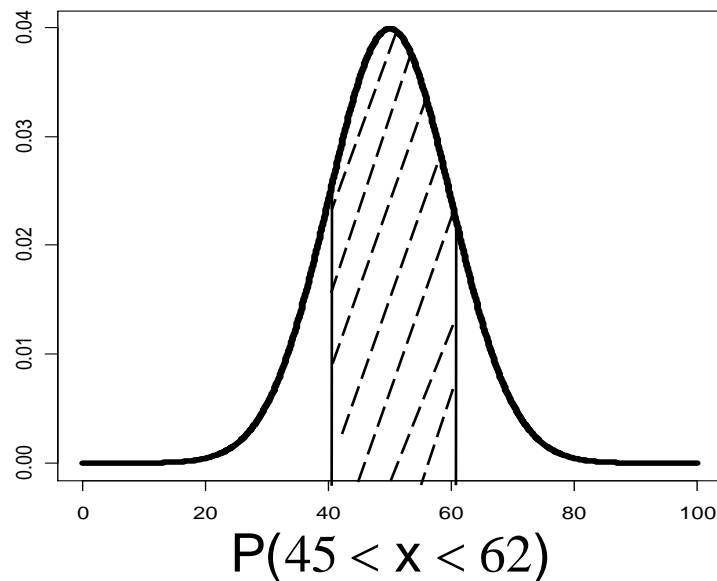
Carilah probabilitas bahawa X mendapat ilai antara 45 dan 62

Jawab:

Dicari nilai z yang berpadaan dengan $x_1 = 45$ dan $x_2 = 62$ adalah

$$z_1 = \frac{45-50}{10} = -0.5 \text{ dan } z_2 = \frac{62-50}{10} = 1.2$$

Jadi: $P(45 < x < 62) = P(-0,5 < z < 1.2)$



Gambar 6.7 Luas daerah contoh 6.1

Gunakan tabel distribusi normal standart, diperoleh:

$$\begin{aligned} P(45 < x < 62) &= P(-0,5 < z < 1,2) \\ &= P(z < 1,2) - P(z < -0,5) \\ &= 0,8849 - 0,3085 \\ &= 0,5764 \end{aligned}$$

Dengan R

```
> pnorm(-0.5)
```

```
[1] 0.3085375
```

```
> pnorm(1.2)
```

```
[1] 0.8849303
```

Tabel 6.1. Luas daerah di bawah kurva normal

z	0.00	0.04	0.09
⋮					
-0.5	0.3085				
0					
⋮					
1.2	0.8849				
⋮					

Contoh: Hitung Luas

Pergunakanlah tabel distribusi normal standard untuk menghitung luas daerah :

- a) Di sebelah kanan $z=1.84$
- b) Antara $z=-1.97$ s/d $z=0.86$

Jawab.

Ingat bahwa luas yg diberikan dalam tabel distribusi normal kumulatif adalah luas dari $z=-\infty$ s/d z_0 tertentu: $P(z < z_0)$.

a) $P(z > 1.84) = 1 - P(z \leq 1.84) = 1 - 0.9671 = 0.0329$

b) $P(-1.97 < z < 0.86) = P(z < 0.86) - P(z < -1.97) = 0.8051 - 0.0244 = 0.7807$

Contoh: Cari z

Carilah nilai $z=k$ di distribusi normal standard sehingga

a) $P(Z>k) = 0.3015$

b) $P(k<z<-0.18) = 0.4197$

Jawab:

a) $P(Z>k) = 0.3015$ berarti $P(Z<k) = 1 - P(z>k) = 1 - 0.3015 = 0.6985$

Dari tabel terbaca luas ke kiri = 0.6985 adalah untuk $z=0.52$.

b) $P(k<z<-0.18) = P(z<-0.18) - P(z<k) = 0.4197$
 $= 0.4286 - P(z<k) = 0.4197$

Jadi $P(z<k) = 0.4286 - 0.4197 = 0.0089$

Dari tabel $z = -2.37$

Contoh: Luas di bawah kurva normal non standard

Contoh.

Variabel X terdistribusi normal dengan mean 50 dan standard deviasi =10. Carilah probabilitas untuk menemukan X bernilai antara 45 dan 62?

Jawab.

Dalam soal ini $\mu = 50$ dan $\sigma = 10$. $x_1 = 45$ dan $x_2 = 62$

Pertama kita mapping x ke z (melakukan normalisasi atau standardisasi):

$$z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma} \rightarrow z_1 = \frac{45 - 50}{10} = -0.5$$

$$z_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma} \rightarrow z_2 = \frac{62 - 50}{10} = 1.2$$

Sehingga

$$P(45 < x < 62) = P(-0.5 < z < 1.2)$$

$$P(-0.5 < z < 1.2) = P(z < 1.2) - P(z < -0.5) = 0.8849 - 0.3085 = 0.5764$$