



PENGUJIAN HIPOTESIS

EGI SAFITRI, S.MAT., M.SI

Menguji Kesamaan Dua Rata-rata

Uji Dua Pihak

MENGUJI KESAMAAN DUA RATA-RATA



Misalkan ada dua populasi berdistribusi normal dengan masing-masing rata-rata dan simpangan baku secara berturut-turut μ_1 dan μ_2 dan σ_1 dan σ_2 . Secara independen dari populasi kesatu diambil sebuah sampel acak berukuran n_1 , sedangkan dari populasi kedua sebuah sampel acak diambil sebanyak n_2 . Dari kedua sampel ini berturut-turut diperoleh \bar{x}_1, s_1 dan \bar{x}_2, s_2 . Akan diuji tentang rata-rata μ_1 dan μ_2 .

Pasangan hipotesis nol dan tandingannya yang akan diuji adalah:

$$\begin{cases} H_0: \mu_1 = \mu_2 \\ H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$$

Untuk ini dibedakan dalam beberapa kasus:

1. $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ dan σ diketahui

Statistik yang digunakan jika H_0 benar adalah:

$$z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

Dengan taraf nyata α , maka kriteria pengujian adalah: terima H_0 jika $-z_{1/2(1-\alpha)} < z <$

$z_{1/2(1-\alpha)}$ dimana $z_{1/2(1-\alpha)}$ didapat dari daftar normal baku dengan peluang $1/2(1-\alpha)$.

Dalam hal lainnya H_0 ditolak.

2. $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ tetapi σ tidak diketahui

Statistik yang digunakan jika H_0 benar adalah:

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

Dengan

$$s^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

Dengan taraf nyata α , maka kriteria pengujian adalah: terima H_0 jika $-t_{1-\frac{1}{2}\alpha} < t < t_{1-\frac{1}{2}\alpha}$ dimana $t_{1-\frac{1}{2}\alpha}$ didapat dari daftar student dengan $dk = n_1 + n_2 - 2$ peluang $1 - \frac{1}{2}\alpha$. Dalam hal lainnya H_0 ditolak.

3. $\sigma_1 \neq \sigma_2$ dan kedua-duanya tidak diketahui
 Statistik yang digunakan jika H_0 benar adalah:

$$t' = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

Dengan taraf nyata α , maka kriteria pengujian adalah: terima H_0 jika

$$-\frac{w_1 t_1 + w_2 t_2}{w_1 + w_2} < t' < \frac{w_1 t_1 + w_2 t_2}{w_1 + w_2}$$

Dengan: $w_i = \frac{s_i^2}{n_i}$ dan $t_i = t_{(1-\frac{1}{2}\alpha), (n_i-1)}$ dengan $i = 1, 2$. Dalam hal lainnya H_0 ditolak.

4. Observasi berpasangan

Untuk observasi berpasangan, ambil $\mu_B = \mu_1 - \mu_2$. Hipotesis nol dan tandinggannya adalah:

$$\begin{cases} H_0: \mu_B = 0 \\ H_1: \mu_B \neq 0 \end{cases}$$

Jika $B_i = x_i - y_i$, maka data B_1, B_2, \dots, B_n menghasilkan \bar{B} dan simpangan baku s_B . Untuk pengujian hipotesis, gunakan statistik:

$$t = \frac{\bar{B}}{s_B / \sqrt{n}}$$

dan terima H_0 jika $-t_{1-\frac{1}{2}\alpha} < t < t_{1-\frac{1}{2}\alpha}$ dimana $t_{1-\frac{1}{2}\alpha}$ didapat dari daftar student dengan $dk = n_1 + n_2 - 2$ peluang $1 - \frac{1}{2}\alpha$. Dalam hal lainnya H_0 ditolak.

Contoh

Dua macam makanan A dan B diberikan kepada ayam secara terpisah untuk jangka waktu tertentu. Ingin diketahui macam makanan yang mana yang lebih baik bagi ayam tersebut. Sampel acak yang terdiri atas 11 ayam diberi makanan A dan 10 ayam diberi makanan B. Tambah berat badan ayam (dalam ons) hasil percobaan adalah sebagai berikut:

A	3.1	3.0	3.3	2.9	2.6	3.0	3.6	2.7	3.8	4.0	3.4
B	2.7	2.9	3.4	3.2	3.3	2.9	3.0	3.0	2.6	3.7	

Dalam taraf nyata $\alpha = 0,05$, tentukan apakah kedua macam makanan itu sama baiknya atau tidak. (berat daging ayam berdistribusi normal dengan varians yang sama besar)

Jawab:

1. $\begin{cases} H_0: \mu_1 = \mu_2 \\ H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$
2. Uji statistik : t
3. Uji 2 pihak
4. Taraf nyata $\alpha = 0,05$, maka $-t_{0,975;19} < t < t_{0,975;19} \leftrightarrow -2,09 < t < 2,09$
5. Nilai Statistik:

Rata-rata dan varians untuk masing-masing sampel:

$$\bar{x}_A = \frac{\sum x_i}{n_A} = \frac{35,4}{11} = 3,22 \text{ dan } s_A^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x}_A)^2}{n_A - 1} = \frac{1,9964}{10} = 0,1996$$

$$\bar{x}_B = \frac{\sum x_i}{n_B} = \frac{30.2}{10} = 3.02 \text{ dan } s_B^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x}_B)^2}{n_B - 1} = \frac{1.001}{9} = 0.1112$$

Maka simpangan baku gabungannya:

$$s^2 = \frac{(11 - 1)(0.1996) + (10 - 1)(0.1112)}{11 + 10 - 2} = \frac{2.9968}{19} = 0.1577$$

Maka:

$$t = \frac{3.22 - 3.02}{\sqrt{0.1577} \sqrt{\frac{1}{11} + \frac{1}{10}}} = 0.862$$

6. Kesimpulan: karena t hitung berada dalam daerah penerimaan H_0 , maka H_0 diterima. Artinya kedua macam makanan ayam itu memberikan tambahan berat daging ayam sama terhadap ayam-ayam itu.

Uji Satu Pihak

MENGUJI KESAMAAN DUA RATA-RATA



Misalkan ada dua populasi berdistribusi normal dengan masing-masing rata-rata dan simpangan baku secara berturut-turut μ_1 dan μ_2 dan σ_1 dan σ_2 . Secara independen dari populasi kesatu diambil sebuah sampel acak berukuran n_1 , sedangkan dari populasi kedua sebuah sampel acak diambil sebanyak n_2 . Dari kedua sampel ini berturut-turut diperoleh \bar{x}_1, s_1 dan \bar{x}_2, s_2 . Akan diuji tentang rata-rata μ_1 dan μ_2 . Maka pengujian hipotesis:

Hipotesis		$\begin{cases} H_0: \mu_1 = \mu_2 \\ H_1: \mu_1 > \mu_2 \end{cases}$	$\begin{cases} H_0: \mu_1 = \mu_2 \\ H_1: \mu_1 < \mu_2 \end{cases}$
$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ dan σ diketahui	Uji Statistik	$z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$	
	Kriteria pengujian	H_0 ditolak : $z \geq z_{0,5-\alpha}$	H_0 ditolak : $z \leq -z_{0,5-\alpha}$
$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ tetapi σ tidak diketahui	Uji Statistik	<p>Dengan:</p> $t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$ $s^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$	
	Kriteria pengujian	H_0 ditolak : $t \geq t_{1-\alpha}$ dengan: $dk = n_1 + n_2 - 2$ peluang $1 - \alpha$	H_0 ditolak : $t \leq -t_{1-\alpha}$ dengan: $dk = n_1 + n_2 - 2$ peluang $1 - \alpha$

$\sigma_1 \neq \sigma_2$ dan kedua-duanya tidak diketahui	Uji Statistik Kriteria pengujian	$t' = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$ dengan: $w_i = \frac{s_i^2}{n_i}$ dan $t_i = t_{(1-\alpha), (n_i-1)}$ dengan $i = 1, 2$
---	---	---

Contoh

Diduga bahwa pemuda yang senang berenang rata-rata lebih tinggi badannya daripada pemuda sebaya yang tidak senang berenang. Untuk meneliti ini telah diukur 15 pemuda yang senang berenang dan 20 yang tidak senang berenang. Rata-rata tinggi badannya berturut-turut 167,2 cm dan 160,3 cm. Simpangan baknya masing-masing 6,7 cm dan 7,1 cm. Dalam taraf nyata $\alpha = 0,05$, dapatkah kita mendukung dugaan tersebut? (misal distribusi tinggi badan untuk kedua kelompok pemuda itu normal dan $\sigma_1 \neq \sigma_2$)

Jawab

1. $\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 > \mu_2 \end{cases}$
2. Uji statistik: t
3. Uji satu pihak

4. Taraf nyata $\alpha = 0,05$, maka $t' \geq \frac{w_1 t_1 + w_2 t_2}{w_1 + w_2}$

Dengan $w_1 = \frac{s_1^2}{n_1} = \frac{6,7^2}{15} = 2,99$, $w_2 = \frac{s_2^2}{n_2} = \frac{7,1^2}{20} = 2,52$, $t_1 = t_{(1-\alpha), (n_1-1)} = 1,76$, dan

$t_2 = t_{(1-\alpha), (n_2-1)} = 1,73$ maka

$$t' \geq \frac{(2,99)(1,76) + (2,52)(1,73)}{2,99 + 2,52} \leftrightarrow t \geq 1,75$$

5. Nilai statistik: $t' = \frac{167,2 - 160,3}{\sqrt{\frac{6,7^2}{15} + \frac{7,1^2}{20}}} = 2,94$

6. Kesimpulan: Karena t' hitung berada dalam daerah penolakan H_0 , maka H_0 ditolak. Artinya benar tinggi pemuda yang suka berenang lebih tinggi dibandingkan pemuda yang tidak suka berenang.

Menguji Kesamaan Dua Proposisi

Uji Dua Pihak

MENGUJI KESAMAAN DUA PROPOSISI



Misalkan ada dua populasi berdistribusi binom yang didalamnya masing-masing didapat proporsi peristiwa A sebesar π_1 dan π_2 . Dari populasi kesatu diambil sebuah sampel acak berukuran n_1 dan didalamnya terdapat proporsi peristiwa A sebesar x_1/n_1 . Dari populasi kedua diambil sebuah sampel acak berukuran n_2 dan didalamnya terdapat proporsi peristiwa A sebesar x_2/n_2 . Kedua sampel diambil secara independen. Maka pengujian hipotesis:

$$\begin{cases} H_0 : \pi_1 = \pi_2 \\ H_1 : \pi_1 \neq \pi_2 \end{cases}$$

Untuk ini digunakan pendekatan oleh distribusi normal dengan statistik:

$$z = \frac{\frac{x_1}{n_1} - \frac{x_2}{n_2}}{\sqrt{pq \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}}$$

Dengan $p = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2}$ dan $q = 1 - p$. Jika dalam pengujian ini digunakan taraf nyata α , maka kriteria pengujian adalah: terima H_0 jika $-z_{1/2(1-\alpha)} < z < z_{1/2(1-\alpha)}$ dimana $z_{1/2(1-\alpha)}$ didapat dari daftar normal baku dengan peluang $1/2(1 - \alpha)$. Dalam hal lainnya H_0 ditolak.

Contoh

Suatu penelitian dilakukan di daerah A terhadap 250 pemilih. Terdapat 150 pemilih menyatakan akan memilih calon C. Di daerah B penelitian dilakukan terhadap 300 pemilih dan terdapat 162 yang akan memilih calon C. Dengan taraf nyata $\alpha = 0,05$ adakah perbedaan yang nyata mengenai pemilih calon C di antara kedua daerah itu?

Jawab

1. $\begin{cases} H_0 : \pi_1 = \pi_2 \\ H_1 : \pi_1 \neq \pi_2 \end{cases}$
2. Uji statistik : z
3. Uji dua pihak
4. taraf nyata $\alpha = 0,05$, maka $-z_{1/2(1-\alpha)} < z < z_{1/2(1-\alpha)} \leftrightarrow -1.96 < z < 1.96$
5. Nilai statistik: dengan $p = \frac{150+162}{250+300} = 0.5673$ dan $q = 1 - 0.5673 = 0.4327$

$$z = \frac{\frac{150}{250} - \frac{162}{300}}{\sqrt{(0.5673)(0.4327) \left(\frac{1}{250} + \frac{1}{300} \right)}} = 1.42$$

6. Kesimpulan: karena z hitung berada dalam daerah penerimaan H_0 , maka H_0 diterima. Artinya tidak ada perbedaan yang nyata mengenai pemilih calon C diantara kedua daerah.

Uji Satu Pihak

MENGUJI KESAMAAN DUA PROPOSISI



Uji pihak kanan, maka pasangan hipotesisnya adalah:

$$\begin{cases} H_0 : \pi_1 = \pi_2 \\ H_1 : \pi_1 > \pi_2 \end{cases}$$

Statistik yang digunakan masih berdasarkan pendekatan oleh distribusi normal. Kriteria pengujian: H_0 ditolak $z \geq z_{0.5-\alpha}$ dimana $z_{(1-\alpha)}$ didapat dari daftar normal baku dengan peluang $(1 - \alpha)$. Dalam hal lainnya H_0 ditolak.

Uji pihak kiri, maka pasangan hipotesisnya adalah:

$$\begin{cases} H_0 : \pi_1 = \pi_2 \\ H_1 : \pi_1 < \pi_2 \end{cases}$$

Statistik yang digunakan masih berdasarkan pendekatan oleh distribusi normal. Kriteria pengujian: H_0 ditolak $z \leq -z_{0.5-\alpha}$ dimana $z_{(1-\alpha)}$ didapat dari daftar normal baku dengan peluang $(1 - \alpha)$. Dalam hal lainnya H_0 ditolak

Contoh

Terdapat dua kelompok, ialah A dan B, masing-masing terdiri dari 100 pasien yang menderita semacam penyakit. Kepada kelompok A diberikan serum tertentu tetapi tidak kepada kelompok B. Kelompok B sering dinamakan kelompok kontrol. Setelah jangka waktu tertentu, terdapat 80 yang sembuh dari kelompok A dan 68 dari kelompok B. Apakah penelitian ini memperlihatkan bahwa pemberian serum ikut membantu menyembuhkan penyakit? ($\alpha = 0,05$)

Jawab

1. $\begin{cases} H_0 : \pi_A = \pi_B \\ H_1 : \pi_A > \pi_B \end{cases}$
2. Uji statistik : z
3. Uji satu pihak
4. taraf nyata $\alpha = 0,05$, maka $z \geq z_{0,5-\alpha} \leftrightarrow z \geq 1.64$
5. Nilai statistik: dengan $p = \frac{80+68}{100+100} = 0.74$ dan $q = 1 - 0.74 = 0.26$

$$z = \frac{\frac{80}{100} - \frac{68}{100}}{\sqrt{(0.74)(0.26) \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{100} \right)}} = 1.94$$

6. Kesimpulan: karena z hitung berada dalam daerah penerimaan H_0 , maka H_0 diterima. Artinya pemberian serum membantu menyembuhkan penelitian.

RANGKUMAN

PENGUJIAN KESAMAAN



Menguji Rata-rata

Hipotesis	Kondisi	Distribusi	Statistik	Daerah Ho
$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$	σ diketahui	Normal	$Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$	Terima $-Z_{\frac{1}{2}(1-\alpha)} < Z < Z_{\frac{1}{2}(1-\alpha)}$
	σ tidak diketahui	Student	$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}}$	Terima $-t_{1-\frac{1}{2}\alpha} < t < t_{1-\frac{1}{2}\alpha}$ $dk = (n - 1)$
$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$	σ diketahui	Normal	$Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$	Tolak $Z \geq Z_{0,5-\alpha}$
	σ tidak diketahui	Student	$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}}$	Tolak $t \geq t_{1-\alpha}$ $dk = (n - 1)$
$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$	σ diketahui	Normal	$Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$	Tolak $Z \leq -Z_{0,5-\alpha}$
	σ tidak diketahui	Student	$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}}$	Tolak $t \leq -t_{1-\alpha}$ $dk = (n - 1)$

Menguji Proporsi

Hipotesis	Distribusi	Statistik	Daerah Ho
$H_0: \pi = \pi_0$ $H_1: \pi \neq \pi_0$	Normal	$Z = \frac{\frac{x}{n} - \pi_0}{\sqrt{\frac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}}}$	Terima $-Z_{\frac{1}{2}(1-\alpha)} < Z < Z_{\frac{1}{2}(1-\alpha)}$
$H_0: \pi = \pi_0$ $H_1: \pi > \pi_0$	Normal	$Z = \frac{\frac{x}{n} - \pi_0}{\sqrt{\frac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}}}$	Tolak $Z \geq Z_{0,5-\alpha}$
$H_0: \pi = \pi_0$ $H_1: \pi < \pi_0$	Normal	$Z = \frac{\frac{x}{n} - \pi_0}{\sqrt{\frac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}}}$	Tolak $Z \leq -Z_{0,5-\alpha}$

Menguji Kesamaan Rata-rata

Hipotesis	Kondisi	Distribusi	Statistik	Daerah Ho
$H_0: \mu_1 = \mu_2$ $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$	$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$	Normal	$Z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$	Terima $-Z_{\frac{1}{2}(1-\alpha)} < Z < Z_{\frac{1}{2}(1-\alpha)}$
	$\sigma_1 = \sigma_2 = s^2$	Student	$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$	Terima $-t_{1-\frac{1}{2}\alpha} < t < t_{1-\frac{1}{2}\alpha}$ $dk = n_1 + n_2 - 2$
	$\sigma_1 \neq \sigma_2$	Student	$t' = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$	Terima $-\frac{w_1 t_1 + w_2 t_2}{w_1 + w_2} < t' < \frac{w_1 t_1 + w_2 t_2}{w_1 + w_2}$ $w_l = s_l^2 / n_l$ $t_l = t_{(1-\frac{1}{2}\alpha), (n_l-1)}$

Menguji Kesamaan Rata-rata

$H_0: \mu_1 = \mu_2$ $H_1: \mu_1 > \mu_2$	$\sigma_1 = \sigma_2 = s^2$	Student	$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$	Tolak $t \geq t_{1-\alpha}$ $dk = n_1 + n_2 - 2$
	$\sigma_1 \neq \sigma_2$	Student	$t' = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$	Tolak $t' \geq \frac{w_1 t_1 + w_2 t_2}{w_1 + w_2}$ $w_l = s_l^2 / n_l$ $t_l = t_{(1-\frac{1}{2}\alpha), (n_l-1)}$

Menguji Kesamaan Rata-rata

$H_0: \mu_1 = \mu_2$ $H_1: \mu_1 < \mu_2$	$\sigma_1 = \sigma_2 = s^2$	Student	$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$	Tolak $t \leq -t_{1-\alpha}$ $dk = n_1 + n_2 - 2$
	$\sigma_1 \neq \sigma_2$	Student	$t' = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$	Tolak $t' \leq -\frac{w_1 t_1 + w_2 t_2}{w_1 + w_2}$ $w_i = s_i^2 / n_i$ $t_i = t_{(1-\frac{1}{2}\alpha), (n_i-1)}$

$$s^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

Menguji Kesamaan Dua Proporsi

Hipotesis	Distribusi	Statistik	Daerah Ho
$H_0: \pi_1 = \pi_2$ $H_1: \pi_1 \neq \pi_2$	Normal	$Z = \frac{\left(\frac{x_1}{n_1}\right) - \left(\frac{x_2}{n_2}\right)}{\sqrt{pq \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$	Terima $-Z_{\frac{1}{2}(1-\alpha)} < Z < Z_{\frac{1}{2}(1-\alpha)}$
$H_0: \pi_1 = \pi_2$ $H_1: \pi_1 > \pi_2$	Normal	$Z = \frac{\left(\frac{x_1}{n_1}\right) - \left(\frac{x_2}{n_2}\right)}{\sqrt{pq \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$	Tolak $Z \geq Z_{0,5-\alpha}$
$H_0: \pi_1 = \pi_2$ $H_1: \pi_1 < \pi_2$	Normal	$Z = \frac{\left(\frac{x_1}{n_1}\right) - \left(\frac{x_2}{n_2}\right)}{\sqrt{pq \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$	Tolak $Z \leq -Z_{0,5-\alpha}$