

Analisis Regresi Linier Berganda

EGI SAFITRI, S.MAT., M.SI

ANALISIS REGRESI DAN KORELASI BERGANDA

Bentuk persamaan regresi dengan dua variabel indenpenden adalah:

$$Y = a + b_1 X_1 + b_2 X_2$$

Bentuk persaman regresi dengan 3 variabel independen adalah:

$$Y = a + b X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3$$

Bentuk umum persamaan regresi untuk k variabel indenden dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$Y = a + b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3 + \dots + b_k X_k$$

Persamaan untuk mendapatkan koefisien regresi

Prinsip metode *ordinary least square*(OLS) adalah meminimumkan jumlah kuadrat deviasi di sekitar garis regresi. Nilai koefisien regresi a , b_1 , dan b_2 dapat dipecahkan secara simultan.

$$\sum Y = na + b_1 \sum X_1 + b_2 \sum X_2 \quad (1)$$

$$\sum X_1 Y = a \sum X_1 + b_1 \sum X_1^2 + b_2 \sum X_1 X_2 \quad (2)$$

$$\sum X_2 Y = a \sum X_2 + b_1 \sum X_1 X_2 + b_2 \sum X_2^2 \quad (3)$$

CONTOH: PERMINTAAN DIPENGARUHI HARGA DAN PENDAPATAN

Nomor Sampel	Permintaan (Y) Minyak (Harga minyak (X_1)	Pendapatan (Rp (X_2))
1	3	8	10
2	4	7	10
3	5	7	8
4	6	7	5
5	6	6	4
6	7	6	3
7	8	6	2
8	9	6	2
9	10	5	1
10	10	5	1

Untuk mendapatkan koefisien regresi, perlu dihitung : $\sum Y$, $\sum X_1$, $\sum X_2$, $\sum X_1 Y$, $\sum X_1^2$, $\sum X_1 \sum X_2$, $\sum X_2 Y$, $\sum X_2^2$

Y	X ₁	X ₂	YX ₁	YX ₂	X ₁ ²	X ₂ ²	X ₁ X ₂
3	8	10	24	30	64	100	80
4	7	10	28	40	49	100	70
5	7	8	35	40	49	64	56
6	7	5	42	30	49	25	35
6	6	4	36	24	36	16	24
7	6	3	42	21	36	9	18
8	6	2	48	16	36	4	12
9	6	2	54	18	36	4	12
10	5	1	50	10	25	1	5
10	5	1	50	10	25	1	5
$\sum Y=68$	$\sum X_1=63$	$\sum X_2=46$	$\sum X_1 Y=409$	$\sum X_2 Y=239$	$\sum X_1^2=405$	$\sum X_2^2=324$	$\sum X_1 \sum X_2=317$

Dengan metode eliminasi

$$68 = 10a + 63b_1 + 46b_2 \quad \dots(1)$$

$$409 = 63a + 405b_1 + 317b_2 \quad \dots(2)$$

$$239 = 46a + 317b_1 + 324b_2 \quad \dots(3)$$

Untuk mendapatkan nilai koefisien regresi a, b1, dan b2 dapat dilakukan dengan Substitusi antar persamaan

$$-428,4 = -63a - 396,9 b_1 - 289,8b_2 \quad \dots\text{persamaan 1 dikalikan } -6,3$$

$$409 = 63a + 405b_1 + 317b_2 \quad \dots(2)$$

$$-19,4 = 0 + 8,1b_1 + 27,2b_2 \quad \dots(4)$$

$$-312,8 = -46a - 289,8 b_1 - 211,6b_2 \quad \text{Persamaan 1 dikalikan } -4,6$$

$$239 = 46a + 317b_1 + 324b_2 \quad \dots(3)$$

$$-73,8 = 0 + 27,2b_1 + 112,4b_2 \quad \dots(5)$$

Dari persamaan diatas, nilai b_2 adalah $= -8,65/21,06 = -0,41$.
 Setelah menemukan nilai b_2 , nilai b_1 dapat dicari dengan
 mempergunakan persamaan 4 atau 5.

$$-19,4 = 0 + 8,1b_1 + 27,2(-0,41) \dots\dots\dots (4)$$

$$19,4 = 8,1b_1 - 11,18$$

$$8,1b_1 = -19,4 + 11,18$$

$$8,1 b_1 = - 8,22$$

$$b_1 = -8,22/8,1 = -1,015$$

$$68 = 10a + 63 (-1,015) + 46(-0,41) \dots\dots\dots (1)$$

$$68 = 10a - 63,96 - 18,90$$

$$10a = 63 + 92,86$$

$$a = 150,86/10 = 15,086$$

Dengan menemukan nilai koefisien regresi a , b_1 , dan b_2 maka persamaan regresinya dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$Y = 15,086 - 1,015X_1 - 0,41 X_2$$

RUMUS KOEFISIEN DETERMINASI (R^2)

Koefisien Determinasi menunjukkan suatu proporsi dari varian yang dapat diterangkan oleh persamaan regresi (*regression of sum squares*, RSS). Besarnya koefisien determinasi dirumuskan sebagai berikut:

$$R^2 = \frac{(\hat{Y} - \bar{Y})^2}{(Y - \bar{Y})^2} \quad \boxed{\text{atau}}$$
$$R^2 = \frac{n(a \cdot \sum Y + b_1 \cdot \sum YX_1 + b_2 \cdot \sum YX_2) - (\sum Y)^2}{n \cdot \sum Y^2 - (\sum Y)^2}$$

$$R^2 = \frac{n(a \cdot \sum Y + b_1 \cdot \sum YX_1 + b_2 \cdot \sum YX_2) - (\sum Y)^2}{n \cdot \sum Y^2 - (\sum Y)^2}$$

$$R^2 = \frac{10[(15,086)(68) - 1,015(409) - (0,41)(239)] - (68)^2}{(10)(516) - (68)^2}$$

$$R^2 = 0,939$$

Korelasi sederhana

$$r_{YX_1} = \frac{n \sum YX_1 - \sum Y \sum X_1}{\sqrt{[n \sum Y^2 - (\sum Y)^2][n \sum X_1^2 - (\sum X_1)^2]}}$$

$$r_{YX_2} = \frac{n \sum YX_2 - \sum Y \sum X_2}{\sqrt{[n \sum Y^2 - (\sum Y)^2][n \sum X_2^2 - (\sum X_2)^2]}}$$

$$r_{X_1X_2} = \frac{n \sum X_1X_2 - \sum X_1 \sum X_2}{\sqrt{[n \sum X_1^2 - (\sum X_1)^2][n \sum X_2^2 - (\sum X_2)^2]}}$$

KORELASI PARSIAL: Hubungan variabel dengan asumsi variabel lain tetap

$$r_{YX_1 \cdot X_2} = \frac{r_{YX_1} - r_{YX_2} r_{X_1X_2}}{\sqrt{(1 - r_{YX_2}^2)(1 - r_{X_1X_2}^2)}}$$

$r_{yX_1 \cdot X_2}$ = korelasi Y dengan X_1 ,
dimana X_2 tetap

$$r_{YX_2 \cdot X_1} = \frac{r_{YX_2} - r_{YX_1} r_{X_1X_2}}{\sqrt{(1 - r_{YX_1}^2)(1 - r_{X_1X_2}^2)}}$$

$$r_{X_1X_2 \cdot Y} = \frac{r_{X_1X_2} - r_{YX_1} r_{YX_2}}{\sqrt{(1 - r_{YX_1}^2)(1 - r_{YX_2}^2)}}$$

Kesalahan Baku (standar error pendugaan)

$$S_{Y.X_1X_2} = \sqrt{\frac{\sum (\hat{Y} - Y)^2}{n - (k + 1)}}$$

$S_{Y.X_1X_2}$: Kesalahan baku atau standar error pendugaan Variabel Y

berdasarkan variabel X_1 dan X_2

\hat{Y} : Nilai dugaan dari Y di mana X_1 dan X_2 diketahui

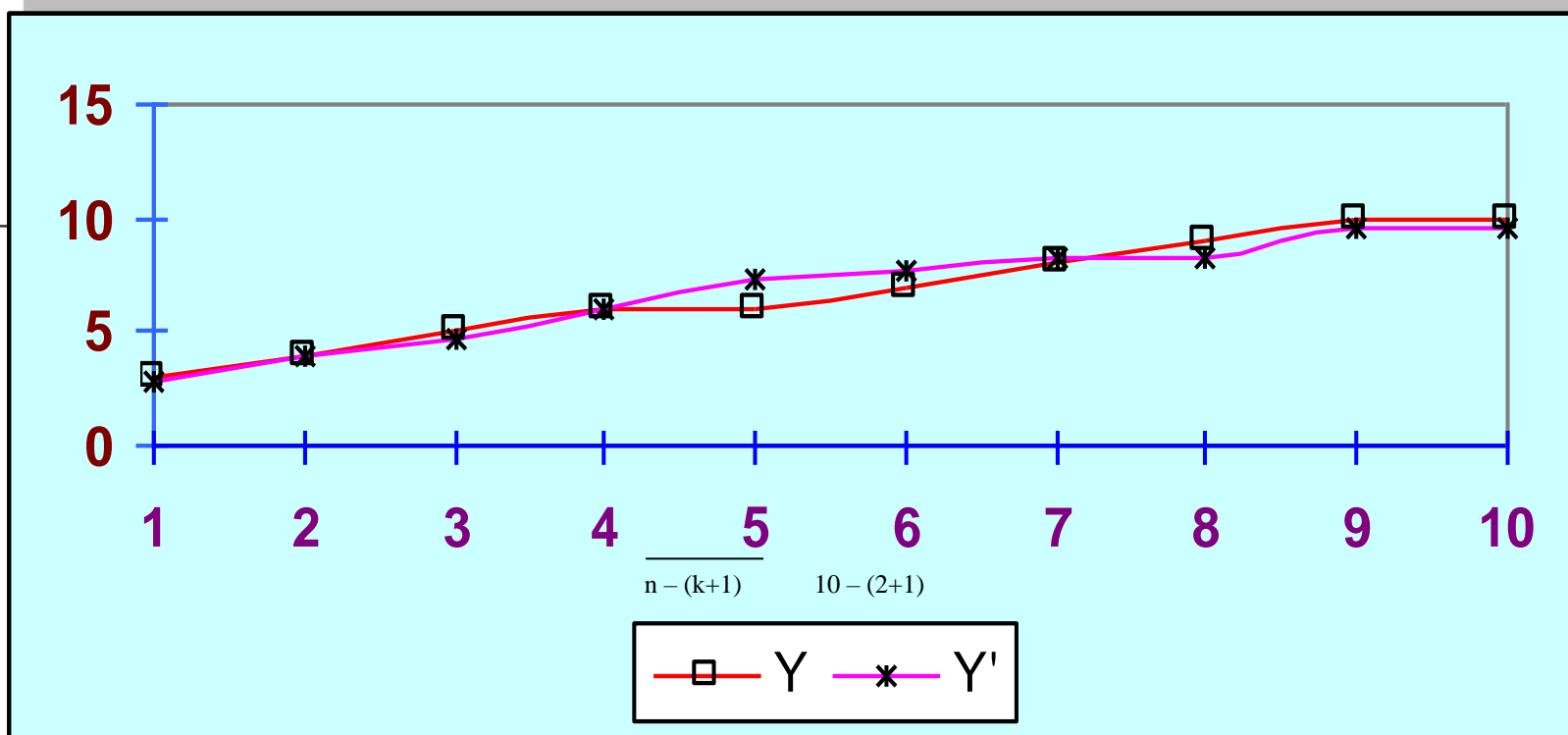
Y : Nilai pengamatan dari Y

N : Jumlah sampel atau data

K : Jumlah variabel bebas

Persamaan $\hat{Y}=15,086 - 1,015 X_1 - 0,41 X_2$

Y	X₁	X₂	$\hat{Y} = 15,086 - 1,015 X_1 - 0,41 X_2$	$(\hat{Y}-Y)$	$(\hat{Y}-Y)^2$
3	8	10	$2,86=15,086 - 1,015 (8) - 0,41(10)$	0,14	0,02
4	7	10	$3,87=15,086 - 1,015 (7) - 0,41(10)$	0,13	0,02
5	7	8	$4,69=15,086 - 1,015 (7) - 0,41 (8)$	0,31	0,09
6	7	5	$5,92=15,086 - 1,015 (7) - 0,41 (5)$	0,08	0,01
6	6	4	$7,35=15,086 - 1,015 (6) - 0,41 (4)$	-1,35	1,83
7	6	3	$7,76=15,086 - 1,015 (6) - 0,41 (3)$	-0,76	0,58
8	6	2	$8,17=15,086 - 1,015 (6) - 0,41 (2)$	-0,17	0,03
9	6	2	$8,17=15,086 - 1,015 (6) - 0,41 (2)$	0,83	0,68
10	5	1	$9,60=15,086 - 1,015 (5) - 0,41 (1)$	0,40	0,16
10	5	1	$9,60=15,086 - 1,015 (5) - 0,41 (1)$	0,40	0,16
$\Sigma (\hat{Y} - Y)^2$					3,58



$$S_{Y.X_1X_2} = \sqrt{\frac{\sum (\hat{Y} - Y)^2}{n - (1 + k)}} = \sqrt{\frac{3.58}{10 - (2 + 1)}} = 0,72$$

Atau dapat juga dicari dengan rumus sbb:

$$S_{Y.X_1X_2} = \sqrt{\frac{\sum Y^2 - a \sum Y - b_1 \sum X_1 Y - b_2 \sum X_2 Y}{n - 3}}$$

$$S_{Y.X_1X_2} = \sqrt{\frac{516 - (15,086 \times 68) - (-1,01524 - 409) - (-0,41 \times 239)}{10 - 3}}$$

$$S_{Y.X_1X_2} = 0,72$$

Kesalahan baku penduga (standar error estimation S_b)

Yaitu seberapa nilai penduga yaitu b_1 dan b_2 dari nilai sebenarnya (parameter populasi)

$$Sb_1 = \frac{S_{y \cdot x_1 x_2}}{\sqrt{(\sum X_1^2 - n \bar{X}_1^2)(1 - r_{x_1 x_2}^2)}} = 0,580$$

$$Sb_2 = \frac{S_{y \cdot x_1 x_2}}{\sqrt{(\sum X_2^2 - n \bar{X}_2^2)(1 - r_{x_1 x_2}^2)}}$$

$$Sb_2 = 0,156$$

Uji Signifikansi parsial atau individu

$$t_{\text{hit}} \cdot b_1 = \frac{b_1 - B_1}{Sb_1} = \frac{-1,015 - 0}{0,58} = -1,75$$

$$t_{\text{hit}} \cdot b_2 = \frac{b_2 - B_2}{Sb_2} = \frac{-0,410 - 0}{0,1558} = -2,673$$

Uji Parsial

Dalam uji parsial, masing-masing koefisien t_{hit} untuk masing-masing koefisien tersebut diuji, apakah signifikan atau tidak

Bentuk pengujian sama seperti sebelumnya dua arah atau satu arah

Hipotesis yang diuji:

$H_0: b_1=0$ dan

$H_a: b_2 \neq 0$

UJI GLOBAL ATAU UJI SIGNIFIKANSI SERENTAK (UJI F)

Hipotesa yang ingin diuji adalah kemampuan variabel bebas menjelaskan tingkah laku variabel tidak bebas, apabila variabel bebas tidak dapat mempengaruhi variabel bebas dapat dianggap nilai koefisien regresinya sama dengan nol, sehingga berapa pun nilai variabel bebas tidak akan berpengaruh terhadap variabel bebas. Terhadap persamaan pada contoh satu yaitu $Y = 15,086 - 1,015X_1 - 0,41 X_2$, variabel bebas X_1 , dan X_2 dikatakan mampu mempengaruhi Y apabila nilai koefisien b_1 dan b_2 tidak sama dengan nol, apabila sama dengan nol, maka dikatakan tidak mampu mempengaruhi variabel bebas Y .

Tabel F

Untuk uji ini digunakan tabel F. Nilai F-tabel perlu diketahui derajat bebas pembilang pada kolom, derajat bebas penyebut pada baris dan taraf nyata. Diketahui ada tiga variabel yaitu Y , X_1 , dan X_2 , jadi $k=3$, sedangkan jumlah $n=10$.

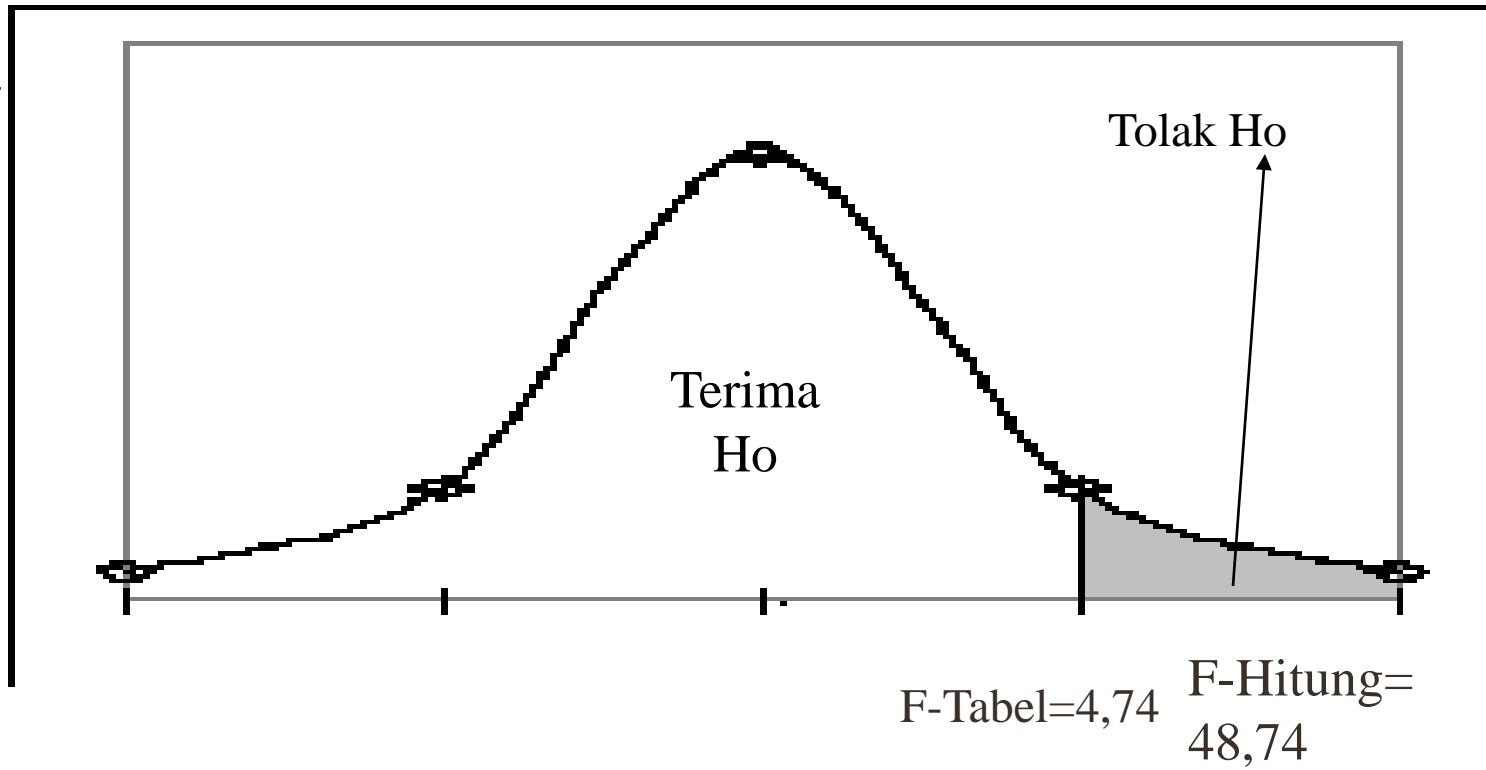
Jadi derajat pembilang $k - 1 = 3 - 1 = 2$, sedangkan derajat penyebut $n - k = 10 - 3 = 7$ dengan taraf nyata 5%. Nilai F-tabel dengan derajat pembilang 2 dan penyebut 7 pada taraf nyata 5% adalah 4,74

Nilai F-hitung ditentukan dengan rumus sebagai berikut:

$$F = \frac{R^2 / (k - 1)}{(1 - R^2) / (n - 3)}$$

$$F = \frac{0,933 / (3 - 1)}{(1 - 0,933) / (10 - 3)} = 0,4665 / 0,0096 = 48,73881$$

UJI GLOBAL ATAU UJI SIGNIFIKANSI SERENTAK (UJI F)



Tampilan printout Regresi Berganda

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Sts. Error of the Estimate
1	.647 ^a	.419	.379	537549.548

Berdasarkan data Tabel diatas menunjukkan hasil uji regresi berganda :

- (1) Nilai R square = 0,419.
- (2) Nilai $R_{y_{12}}$ = 0,647.
- (3) Nilai SEE = 537.549,547.

Model	Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficeient	t	Sig.
	B	Std.Error	Beta		
1 (Constant)	100004	1059097	.752	.944	.353
Harga	792852.6	186021.7	.214	4.262	.000
Biaya promosi	3.378	2.785		1.213	.235

Dari data diatas,

$$a = 1.000.044.$$

$$b_1 = 792.852,6.$$

$$b_2 = 3,378.$$

Persamaan regresi yang didapat adalah sebagai berikut :

$$Y = 1.000.044 + 792.852,6 X_1 + 3,378 X_2$$

Dimana, Y = Penjualan, X1 = Harga dan X2 = Biaya Promosi