Institut Informatika & Bisnis DARMAJAYA
Yayasan Alfian Husin

5

TEOREMA BAYES

DARMAJAYA

TEOREMA BAYES

Definisi :

- Oleh Reverend Thomas Bayes abad ke 18.
- Dikembangkan secara luas dalam statistik inferensi.
- Aplikasi banyak untuk : **Decision Support System (DSS)** dan Rehability

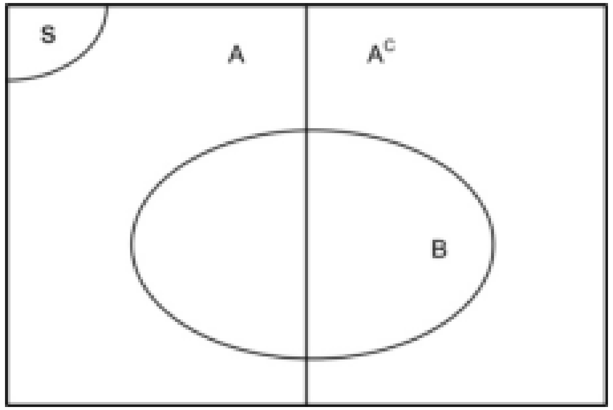
TEOREMA BAYES (ILUSTRASI)

Misalkan dimiliki dua kotak yaitu kotak I dan kotak II. Dalam kotak I terdapat 10 bola yang terdiri dari 3 bola merah dan 7 bola putih sedangkan pada kotak II terdapat 15 bola yang terdiri dari 5 bola merah dan 10 bola putih. Apabila bola-bola tersebut disatukan dalam ember dan satu bola diambil secara random tanpa melihat dan ternyata berwarna merah, akan ditentukan probabilitasnya bahwa bola tersebut semula berasal dari kotak I. Karena keseluruhan terdapat 25 bola yang terdiri dari 10 bola dari kotak I dan 15 bola dari kotak II. Dari 25 bola tersebut, 8 bola berwarna merah dan 17 bola berwarna putih.

TEOREMA BAYES

Misalkan kejadian *B adalah kejadian mendapatkan bola berwarna* merah dan kejadian *A adalah kejadian mendapatkan bola dari kotak I.* Probabilitas bersyarat yang diinginkan adalah

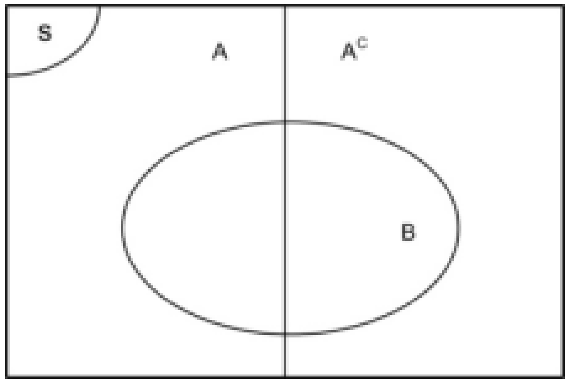
$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}.$$



Hubungan antara Himpunan B, A dan A^c

TEOREMA BAYES (ILUSTRASI)

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}.$$



Hubungan antara Himpunan B, A dan A^c

Kejadian B *dapat ditulis sebagai gabungan dari dua kejadian yang* terpisah yaitu $B \cap A$ *dan* $B \cap A^c$

sehingga

$$B = (B \cap A) \cup (B \cap A^c)$$

Dan berarti

$$P(B) = P(B \cap A) \cup P(B \cap A^c)$$

Akibatnya

$$P(A|B) = \frac{P(B\cap A)}{P\ (B)} = \frac{P(B\cap A)}{P(B\cap A) \cup P(B\cap A^c)}$$

Teorema Bayes (Contoh I)

Misalkan dimiliki dua kotak yaitu kotak I dan kotak II. Dalam kotak I terdapat 10 bola yang terdiri dari 3 bola merah dan 7 bola putih sedangkan pada kotak II terdapat 15 bola yang terdiri dari 5 bola merah dan 10 bola putih. Apabila bola-bola tersebut disatukan dalam ember dan satu bola diambil secara random tanpa melihat dan ternyata berwarna merah, akan ditentukan probabilitasnya bahwa bola tersebut semula berasal dari kotak I. Karena keseluruhan terdapat 25 bola yang terdiri dari 10 bola dari kotak I dan 15 bola dari kotak II. Dari 25 bola tersebut, 8 bola berwarna merah dan 17 bola berwarna putih.

Diperoleh

$$P(B \cap A) = \frac{3}{25}$$

$$P(B \cap Ac) = \frac{5}{25}$$

Sehingga

$$P(A|B) = \frac{P(B \cap A)}{P(B \cap A) \cup P(B \cap A^c)}$$

$$P(A|B) = \frac{3/25}{\left(\frac{3}{25}\right) + \left(\frac{5}{25}\right)} = \frac{3}{8}$$

Dalam bentuk teorema Bayes, hal tersebut dapat dinyatakan dengan:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\, P(A)}{P(B|A)\, P(A) + P(B|A^c)\, P(Ac)}$$

$$= \frac{\left(\frac{3}{10}\right)\left(\frac{10}{25}\right)}{\left(\frac{3}{10}\right)\left(\frac{10}{25}\right) + \left(\frac{5}{15}\right)\left(\frac{15}{25}\right)} = \frac{3}{8}$$

TEOREMA BAYES (CONTOH I)

Anggaplah bahwa dalam suatu populasi terdapat laki-laki dan perempuan dengan jumlah yang sama. Dalam populasi ini 10 % dari laki-laki dan 5 % dari wanita adalah buta warna. Seorang buta warna dipilih secara random berapa probabilitasnya orang laki-laki yang terpilih ?

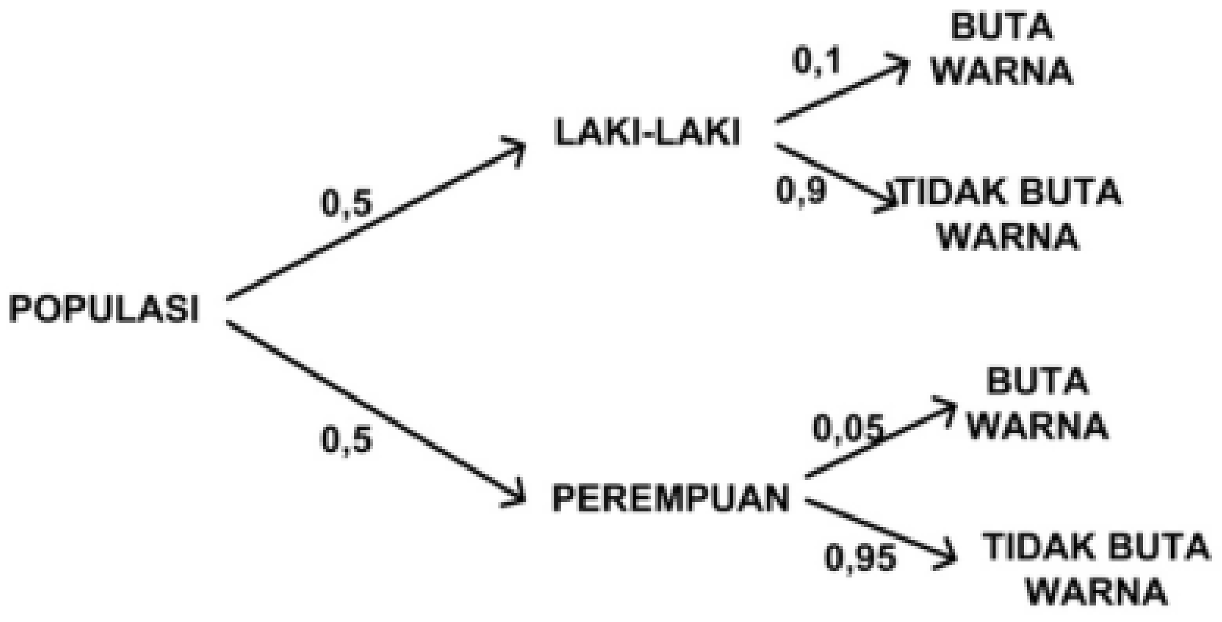


Diagram pohon probabilitas

TEOREMA BAYES (CONTOH I)

Populasi terbagi ke dalam dua himpunan bagian yang saling asing yaitu laki-laki (kejadian **M**) dan perempuan (kejadian **F**). Akan dicari probabilitasnya orang **laki-laki yang terpilih dengan syarat buta warna** (**BW**). Dengan menggunakan teorema Bayes diperoleh:

- $P(M|BW) = \frac{P(BW|M)\,P(M)}{P(BW|M)\,P(M)+P(BW|F)\,P(F)}$
- $P(M|BW) = \frac{(0{,}05)(0{,}5)}{(0{,}05)(0{,}5)+(0{,}0025)(0{,}5)} = \frac{0{,}002500}{0{,}002625}$
- $P(M|BW) = \frac{20}{21}$

TEOREMA BAYES (UMUM)

Misalkan { A_1, A_2, …, A_n } suatu himpunan kejadian yang merupakan suatu sekatan ruang sampel ***S*** *dengan* $P(A_i) \neq 0$ untuk $i = 1,2, \ldots, n$.

Misalkan *B suatu kejadian sembarang dalam S dengan* $P(B) \neq 0$ maka untuk $k = 1,2, \ldots, n$ *berlaku*

$$P(A_k|B) = \frac{P(Ak \cap B)}{\sum_{i=1}^{k} P(Ai \cap B)} = \frac{P(B|A_k)\, P(A_k)}{\sum_{i=1}^{k} P(B|A_i) P(Ai)}$$

Teorema Bayes (Contoh III)

Suatu generator telekomunikasi nirkabel mempunyai 3 pilihan tempat untuk membangun pemancar sinyal yaitu didaerah tengah kota, daerah kaki bukit dikota itu dan derah tepi pantai, dengan masing-masing mempunyai peluang 0.2; 0.3 dan 0.5. Bila pemancar dibangun ditengah kota, peluang terjadi ganguan sinyal adalah 0.05. Bila pemancar dibangun dikaki bukit, peluang terjadinya ganguan sinyal adalah 0.06.Bila pemancar dibangun ditepi pantai, pelaung ganguan sinyal adalah 0.08.

A. Berapakah peluang terjadinya ganguan sinyal?
B. Bila diketahui telah terjadinya gangguan pada sinyak pada sinyal, berapa peluang bahwa operator tsb ternyata telah membangun pemancar di tepi pantai?

TEOREMA BAYES (CONTOH III)

Misal:

A = Terjadi ganguan sinyal

B1 = Pemancar dibangun di tengah kota

B2 = ---------------------------di kaki bukit

B3 = ---------------------------di tepi pantai

Maka :

- A). Peluang terjadinya ganguan sinyal

$$P(A) = P(A|B1)\,P(B1) + P(A|B2)\,P(B2) + P(A|B3)\,P(B3)$$

$$P(A) = (0.05)\,(0,2) + (0.06)\,(0.3) + (0.08)\,(0.5)$$

$$P(A) = 0.001 + 0.018 + 0.04 = 0.068$$

TEOREMA BAYES (CONTOH III)

B. Diketahui telah terjadi ganguan pd sinyal, maka peluang bahwa operator ternyata telah membangun pemancar di tepi pantai:

Dapat dinyatakan dgn: “Peluang bersyarat bahwa operator membangun pemancar di tepi pantai bila diketahui telah terjadi ganguan sinyal”:

$$P(B_3|A) = \frac{P(B_3 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|B_3)P(B_3)}{P(A)}$$

$$= \frac{(0{,}08)(0{,}5)}{0{,}068} = 0{,}588$$