Metode Simplex dalam Program Linear

BAB3

Mata Kuliah :	Teknik Optimasi
Capaian Pembelajaran :	Mahasiswa mampu
Kemampuan Akhir Yang Diharapkan:	Mema
Alokasi Waktu:	3 x 50 menit
Pertemuan ke:	1 & 2
Indikator:	1.1 1.2

A. Pendahuluan

Salah satu pendekatan yang dapat dilakukan untuk menyelesaikan masalah manajemen sains adalah pemrograman linier. Pemrograman linier merupakan kelompok teknik analisis kuantitatif yang mengandalkan model matematika atau model simbolik sebagai wadahnya. Artinya setiap masalah yang kita hadapi dalam suatu sistem permasalahan tertentu perlu dirumuskan dulu dalam simbol – simbol matematika tertentu, jika kita inginkan bantuan pemrograman linier sebagai alat analisisnya.

Metode grafik merupakan salah satu metode yang dapat digunkan untuk menyelesaikan masalah pemrograman linier yang melihatkan dua berupa keputusan. Membahas mengenai masalah meminimumkan fungsi kendala bertanda ≥ fungi kendala bertanda = tidak ada penyelesaian layak, tidak ada penyelesaian optimal, beberapa alternatif optimal, dan wilayah kelayakan yang tidak terikat dapat terjadi saat menyelesaikan masalah pemrograman linier dengan menggunakan prosedur penyelesaian grafik. Kasus – kasus ini juga dapat terjadi saat menggunakan metode simpleks.

Metode simplek untuk linier programming dikembangkan pertama kali oleh George Dantzing pada tahun 1947, kemudian digunakan juga pada penugasan di Angkatan Udara Amerika Serikat. Dia mendemonstrasikan bagaiamana menggunakan fungsi tujuan (iso-profit) dalam upaya menemukan solusi diantara beberapa kemungkinan solusi sebuah persoalan linier programming. Metode simpleks merupakan salah satu teknik penyelesaian dalam program linier yang digunakan sebagai teknik pengambilan keputusan dalam permasalahan yang berhubungan dengan pengalokasian sumber daya secara optimal. Metoode simpleks digunakan untuk mencari nilai optimal dari program linier yang melibatkan banyak constraint (pembatas) dan banyak variabel (lebih dari dua variabel). Penemuan metode ini merupakan lompatan besar dalam riset operasi dan digunakan sebagai prosedur penyelesaian dari setiap program komputer.

Program linier merupakan metode matematik dalam mengalokasikan sumber daya yang langka untuk mencapai tujuan tunggal seperti memaksimumkan keuntungan atau meminimumkan biaya. Program linier banyak diterapkan dalam membantu menyelesaikan masalah ekonmi, industri, militer, sosial, dan lain – lain. Proses penyelesaiannya dalam metode simplek, dilakukan secara berulang – ulang (iterative) sedemikian rupa dengan menggunakan pola tertentu (standart) sehingga solusi optimal tercapai.

Ciri dari metode simplek adalah bahwa setiap solusi yang baru akan menghasilkan sebuah nilai fungsi tujuan yang lebih besar daripada solusi sebelumnya.

B. Langkah langkah metode simpleks

Untuk menyelesaikan masalah maksimisasi mka program linier harus lebih dahulu ditulis dalam bentuk standar. Dengan bentuk standar dimaksudkan adalah permasalahan program linier yang berwujud permasalahan maksimisasi dengan batasan – batasan (kendala) yang bertanda kurang dari atau sama dengan ($\leq$) yang menunjukkan keterbatasan sumber daya yang tersedia. Untuk bentuk – bentuk lain seperti masalah minimisasi maupun penyimpangan – penyimpangan lain dalam batasan – batasan yang berlaku akan dibicarakan tersendiri.

Berikut merupakan langkah – langkah menggunakan metode simpleks yaitu :

- Mengubah fungsi tujuan dan fungsi kendala
- Menyusun persamaan – persamaan di dalam tabel
- Memilih kolom kunci baris Z dengan bilangan negatif angka yang terbesar
- Mencari nilai indeks (Nilai indeks = NK : nilai kolom kunci
- Memilih baris kunci (Nilai Indeks terkecil)
- Menentukan angka kunci perpotongan kolom kunci dan baris kunci
- Menentukan NBBK (Nilai Baris Baru Kunci) NBBK = baris kunci : angka kunci
- Mengubah nilai – nilai selain baris kunci sehingga nilai – nilai kolom kunci (selalu baris kunci) = 0, baris lama = baris baru – (koefisien angka kolom kunci x NBBK).
- Melanjutkan perbaikan/pengulangan/iterasi

a) Contoh Soal

Selesaikan kasus berikut ini menggunakan metode simpleks :

Maksimum $z = 8\,x_1 + 9\,x_2 + 4x_3$

Kendala :

$x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 2$

$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 3$

$7x_1 + 6x_2 + 2x_3 \leq 8$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

b) Penyelesaian :

Mengubah fungsi tujuan dan fungsi kendala

Maksimum :

$z = 8\ x_1 + 9\ x_2 + 4x_3$ atau

$z - 8\ x_1 - 9\ x_2 - 4x_3 = 0$

Kendala :

$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 2$

$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_5 = 3$

$7x_1 + 6x_2 + 2x_3 + x_6 = 8$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$

Menyusun persamaan – persamaan di dalam table

Beberapa istilah dalam Metode Simpleks yaitu :

- NK adalah nilai kanan persamaan, yaitu nilai di belakang tanda sama dengan (=). Untuk 1 sebesar 2, batasan 2 sebesar 3, dan batasan 3 sebesar 8.
- Variabel dasar adalah variabel yang nilainya sama dengan sisi kanan dari persamaan. Pada persamaan $x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 2$, kalau belum ada kegiatan apa – apa, berarti nilai $x_1 = 0$, dan semua kapasitas masih menganggur, maka pengangguran ada 2 satuan, atau nilai $x_4 = 2$. Pada tabel tersebut nilai variabel dasar (x_4, x_5, x_6) pada fungsi tujuan pada tabel permulaan ini harus 0, dan nilainya pada batasan – batasan bertanda positif.

$z = 8\ x_1 + 9\ x_2 + 4x_3$ diubah menjadi $z - 8\ x_1 - 9\ x_2 - 4x_3 = 0$

$x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 2$ menjadi $x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 2$

$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 3$ menjadi $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_5 = 3$

$7x_1 + 6x_2 + 2x_3 \leq 8$ menjadi $7x_1 + 6x_2 + 2x_3 + x_6 = 8$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Solusi / table awal simpleks :

VD	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	NK	Rasio
Z	1	-8	-9	-4	0	0	0	0	
X_4	0	0	0	2	0	0	0	2	
X_5	0	2	3	4	0	0	0	3	
X_6	0	7	6	2	0	0	0	8	

Karena nilai negative terbesar ada pada kolom X_2, maka kolom X_2 adalah kolom pivot dan X_2 adalah variabel masuk. Rasio pembagian nilai kanan dengan kolom pivot terkecil adalah 1 bersesuaian dengan baris X_5, maka baris X_5 adalah baris pivot dan X_5 adalah varisbel keluar. Elemen pivot adalah 3.

VD	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	NK	Rasio
Z	1	-8	-9	-4	0	0	0	0	
X_4	0	1	1	2	1	0	0	2	2
X_5	0	2	3	4	0	1	0	3	1
X_6	0	7	6	2	0	0	1	8	8/6

Iterasi 1

Nilai pertama yang kita miliki adalah nilai baris pivot baru (baris X_5). Semua nilai pada baris X_5 pada tabel solusi awal dibagi dengan 3 (elemen pivot).

VD	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	NK	Rasio
Z								
X_4								
X_2	2/3	1	4/3	0	1/3	0	1	
X_6								

Perhitungan nilai barisnya :

Baris z :

	-8	-9	4	0	0	0	0 9
(	2/3	1	4/3	0	1/3	0	1) -
	-2	0	8	0	3	0	9

Baris X_4 :

	1	1	2	1	0	0	2
1 (	2/3	1	4/3	0	1/3	0	1) -
	1/3	0	2/3	1	1/3	0	1

Baris X_6 :

	7	6	2	0	0	1	8
6 (	2/3	1	4/3	0	1/3	0	1) -
	3	0	-6	0	-2	1	2

Maka tabel iterasi 1 ditunjukkan tabel di bawah. Selanjutnya kita periksa apakah tabel sudah optimal atau belum. Karena nilai baris z di bawah variabel x_1 masih negatif, maka tabel belum optimal. Kolom dan baris pivotnya ditandai pada tabel di bawah ini :

VD	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	NK	Rasio
Z	1	-2	0	8	0	3	0	9	-
X_4	0	1/3	0	2/3	1	-1/3	0	1	3
X_2	0	2/3	1	4/3	0	1/3	0	1	3/2
X_6	0	3	0	-6	0	-2	1	2	2/3

Variabel masuk dengan demikian adalah X_1 dan variabel keluar adalah X_6 .Hasil perhitungan iterasi ke 2 adalah sebagai berikut :

Iterasi 2 :

VB	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	NK	Rasio
Z	0	0	4	0	5/3	2/3	31/3	
X_4	0	0	4/3	1	-1/9	-1/9	7/9	
X_2	0	1	8/3	0	7/9	-2/9	5/9	
X_1	1	0	-2	0	-2/3	1/3	2/3	

Tabel sudah optimal, sehingga perhitungan iterasi dihentikan !

Perhitungan dalam simpleks menuntut ketelitian tinggi, khususnya jika angka yang digunakan adalah pecahan. Pembulatan harus diperhatikan dengan baik. Disarankan jangan menggunakan bentuk bilangan desimal, akan lebih teliti jika menggunakan bilangan pecahan. Pembulatan dapat menyebabkan iterasi lebih panjang atau bahkan tidak selesai karena ketidaktelitian dalam melakukan pembulatan.

Perhitungan iteratif dalam simpleks pada dasarnya merupakan pemeriksaan satu per satu titik-titik ekstrim layak pada daerah penyelesaian. Pemeriksaan dimulai dari kondisi nol (dimana semua aktivitas/variabel keputusan bernilai nol). Jika titik ekstrim berjumlah n, kemungkinan terburuknya kita akan melakukan perhitungan iteratif sebanyak n kali.

C. Penyimpangan-penyimpangan dari bentuk standart

Pada permasalahan minimisasi, biasanya kita jumpai tanda ≥ pada fungsi kendala. Kendati demikian tidak menutup kemungkinan fungsi kendala mempunyai tanda =. Dalam menyelesaikan permasalahan LP (Linier Program) dengan metde simpleks, langkah pertama yang harus kita lakukan adalah menyesuaikan formulasi permasalahan dengan standard simpleks. Dengan kata lain kita harus merubah tanda pertidaksamaan menjadi persamaan.

Pada fungsi kendala dengan tanda $\leq$ kita harus menambahkan slack variabel yang menyatakan kapasitas yang tidak digunakan atau yang tersisa pada departemen tersebut. Hal ini karena ada kemungkinan kapasitas yang tersedia tidak semuanya digunakan dalam proses produksi. Pada permasalahan minimisasi kita jumpai fungsi kendala dengan tanda $\geq$, artinya bahwa kita dapat menggunakan sumber daya lebih dari yang tersedia. Pertanyaan yang muncul adalah beberapa besarnya kelebihan sumber daya yang telah kita gunakan dari yang tersedia?. Untuk menyatakan kelebihan sumber daya yang digunakan dari yang tersedia ini, maka kita harus mengurangi kendala tersebut dengan surplus variabel. Surplus variabel ini sering disebut sebagai slack variabel yang negatif.

Karena nilai solusi pada permasalahan LP harus non-negatif maka untuk mengatasi masalah ini kita harus menambahkan artificial variabel (A). Artificial variabel ini secara phisik tidak mempunyai arti, dan hanya digunakan untuk kepentingan perhitungan saja.

Contoh Soal :

Minimunkan : $Z = 7 X_1 + 3 X_2$

Kendala :

$4 X_1 + 6 X_2 \leq 36$

$7X_1 + 5X_2 = 35$

$8X_1 + 4X_2 \geq 32$

$X_1, X_2 \geq 0$

- Pada fungsi kendala yang pertama, untuk mengubah menjadi persamaan harus ditambah variabel slack, yang sekaligus digunakan sebagai basis pada tabel awal simpleks. Persamaan tersebut menjadi : $4X1 + 6X2 + S1 = 36$.
- Pada fungsi kendala yang kedua sudah dalam bentuk persamaan, karena belum ada variabel yang merupakan basis pada tabel awal, maka perlu ada variabel dummy (variabel buatan) yang disebut variabel artificial (lambang "R"). Dinamakan artificial karena tidak mempunai arti nyata, artinya iterasi-iterasi metode simpleks akan secara otomatis menjadikan variabel artificial tidak muncul lagi (bernilai nol) yaitu apabila persoalan semula yang telah terselesaikan. Dengan kata lain variabel artificial ini digunakan hanya untuk memulai solusi dan harus menghilangkanya pada akhir solusi. Jika tidak demikian, maka solusi yang diperoleh akan tidak layak. Untuk itu persamaan pembatas kedua diatas akan menjadi : $7X_1 + 5X_2 + R_1 = 35$.
- Sedangkan fungsi pembatas ketiga yang bertanda "≥", maka harus diubah menjadi tanda "≤" dan akhirnya

menjadi tanda "=" agar dapat diselesaikan dengan metode simpleks. Persamaan tersebut dikalikan (-1) akan menjadi : $-8\ X_1 - 4\ X_2 \leq -32$. Kemudian, ubah ke tanda sama dengan seperti yang telah dibahas diatas maka menjadi : $-8\ X_1 - 4\ X_2 + S_2 = -32$. Karena bagian kanan persamaan ini bertanda negatif (-32), maka harus menjadi $8\ X_1 + 4\ X_2 - S_2 = 32$, tetapi karena S_1 bertanda negatif, hal ini tidak memungkinkan dalam metode simpleks karena tidak dapat digunakan sebagai basis pada tabel awal. Untuk itu harus ditambahkan variabel artificial R, sehingga persamaan pembatas ketiga tersebut menjadi: $8\ X_1 + 4\ X_2 - S_2 + R_2 = 32$.

- Dari pembahasan mengenai variabel slack dan variabel artificial berkaitan dengan metode simpleks dapat disimpulkan bahwa :
  1. Apabila fungsi kendala bertanda ≤, maka tambahkan variabel slack.
  2. Apabila fungsi kendala bertanda =, maka tambahkan variabel artificial R.
  3. Apabila fungsi kendala bertanda ≥, maka kurangi dengan variabel slack dan tambahkan variabel artificial R.
  4. Apabila fungsi kendala adalah negatif, maka harus diubah menjadi positif dengan mengalikan

(-1) dan sesuaikan dengan ketiga kesimpulan diatas.

Formulasi yang sudah mengalami modifikasi ini disebut formulasi dalam bentuk standar metode simpleks. Sehingga soal diatas bentuk standarnya adalah :

Minimumkan : $Z = 7\ X_1 + 3\ X_2$

Kendala :

$4\ X_1 + 6\ X_2 + S_1 = 36$

$7\ X_1 + 5\ X_2 + R_1 = 35$

$8\ X_1 + 4\ X_2 - S_2 + R_2 = 32$

$X_1, X_2, S_1, S_2, R_1, R_2 \geq 0$

Penyelesaian persoalan yang mengandung variabel artificial ini dapat dilakukan dengan 2 cara yaitu : metode teknik the big M dan teknik dua fase.

1. **Teknik The Big M (Metode Penalty) :**

Pada teknik ini, setiap variabel artificial dalam fungsi tujuan diberikan penalty M, dimana M merupakan bilangan positif yang sangat besar. Penalty bertanda negatif (-) apabila fungsi tujuan maksimasi dan bertanda positif (+) apabila fungsi tujuan minimasi.

Persamaan menurut contoh diatas menjadi :

Minimunkan : $Z = 7\,X_1 + 3\,X_2 + 0\,S_1 + 0\,S_2 + MR_1 + MR_2$

Kendala :

$4\,X_1 + 6\,X_2 + S_1 = 36$

$7\,X_1 + 5\,X_2 + R_1 = 35$

$8\,X_1 + 4\,X_2 - S_2 + R_2 = 32$

$X_1, X_2, S_1, S_2, R_1, R_2 \geq 0$

Untuk memasukan model matematis persoalan diatas dalam tabel simpleks, maka terlebih dahulu melakukan subtitusi nilai R_1 dan R_2 pada persamaan kendala dan pada persamaan fungsi tujuan Z diatas yaitu :

$R_1 = 35 - 7\,X_1 - 5\,X_2$

$R_2 = 32 - 8\,X_1 - 4\,X_2 + S_2$

Kemudian R_1 dan R_2 tersebut dimasukan kedalam persamaan Z menjadi :

$Z = 7\ X_1 + 3\ X_2 + MR_1 + MR_2$

$Z = 7\ X_1 + 3\ X_2 + M(35 - 7\ X_1 - 5\ X_2) + M(32 - 8\ X_1 - 4\ X_2 + S_2)$

$Z = (7 - 7M - 8M)\ X_1 + (3 - 5M - 4M)\ X_2 + M\ S_2 + (35M + 32M)$

$Z = (7 - 15M)\ X_1 + (3 - 9M)\ X_2 + M\ S_2 + 67M$

$Z + (15M - 7)\ X_1 + (9M - 3)\ X_2 - M\ S_2 = 67\ M$

Berdasarkan persamaan terakhir ini maka dilakukan penyelesaian dengan metode simpleks seperti cara penyelesaian yang sudah diuraikan pada bagian sebelumnya tentang : pemecahan program linear metode simpleks.

Iterasi awal hingga iterasi akhir optimal penyelesaian persoalan diatas dapat dilihat pada tabel berikut :

Iterasi	**Basis**	**Z**	**X_1**	**X_2**	**S_1**	**R_1**	**S_2**	**R_2**	**Solusi**
0	**Z**	1	(15M - 7)	(9M -3)	0	0	-M	0	67M

	S_1	0	4	6	1	0	0	0	36
	R_1	0	7	5	0	1	0	0	35
	R_2	0	8	4	0	0	-1	1	32
Iterasi	**Basis**	**Z**	**X_1**	**X_2**	**S_1**	**R_1**	**S_2**	**R_2**	**Solusi**
1	**Z**	1	0	(3M + 1)/2	0	0	(7M - 7)/8	-(15M - 7)/8	7M + 28
	S_1	0	0	4	1	0	1/2	-1/2	20
	R_1	0	0	3/2	0	1	7/8	-7/8	7
	X_1	0	1	1/2	0	0	-1/8	1/8	4

Iterasi	Basis	Z	X_1	X_2	S_1	R_1	S_2	R_2	Solusi
2	**Z**	1	0	0	0	-M - 1/3	-7/6	-M + 7/6	77/3
	S_1	0	0	0	1	-8/3	-11/6	11/6	4/3
	X_2	0	0	1	0	2/3	7/12	-7/12	14/3
	X_1	0	1	0	0	-1/3	-5/12	5/12	5/3

Dari iterasi ke-2 pada tabel diatas merupakantabel optimal sehingga diketahui nilai optimal untuk X_1 = 5/3, X_2 = 14/3, X_3 = 0, S_1 = 4/3, dan Z = 77/3.

D. Latihan soal

1. PT Unilever bermaksud membuat 2 jenis sabun, yakni sabun bubuk dan sabun batang. Untuk itu dibutuhkan 2 macam zat kimia, yakni A dan B. Jumlah zat kimia yang tersedia adalah A = 200Kg dan B = 360 Kg. Untuk membuat 1Kg sabun bubuk diperlukan 2 Kg A dan 6 Kg B. Untuk mebuat 1 Kg sabun batang diperlukan 5 Kg A dan 3 Kg B. Bila keuntungan yang akan diperoleh setiap membuat 1 Kg sabun bubuk = $3 sedangkan setiap 1 Kg sabun batang = $2, berapa Kg jumlah sabun bubuk dan sabun batang yang sebaiknya dibuat?
2. Perusahaan Brilliant menghasilkan 2 jenis sepatu yaitu sepatu dengan merk italy dan felix. Merk italy dibuat dengan sol dari bahan karet. Sedangkan felix dibuat dengan sl dari bahan kulit. Untuk membuat sepatu tersebut diperlukan 3 jenis mesin yaitu A (khusus untuk sol karet), B (khusus untuk sol kulit), dan C (untuk finishing). Untuk setiap lusin sepatu dibutuhkan waktu :

- Italy dikerjakan pada mesin A selama 2 jam tanpa melalui mesin B dan di mesin C selama 6 jam
- Felix dikerjakan tanpa melalui mesin A, melalui mesin B selama 3 jam dan mesin C selama 5 jam.

  Jam kerja maksimum setiap hari untuk mesin A = 8 melalui mesin B = 15 jam, dan mesin C = 30 jam. Perolehan keuntungan untuk setiap lusin sepatu italy Rp.

30.000,00 dan felix Rp. 50.000,00. Tentukan jumlah produksi sepatu yang menghasilkan laba maksimal

3. PT. Eb07 akan membuat kain sutra dan kain wol, yang terbuat dari benang sutra 3 Kg untuk pembuatan kain sutra dan benang sutra 4 Kg dan benang wol 1 Kg untuk pembuatan kain wol. Masing – masing membutuhkan masa kerja 2 jam untuk kain sutra dan kain wol. Benang sutra kurang dari 120 Kg, benang wol kurang dari 20 Kg dan masa kerja kurang dari 40 jam. Berapakah yang harus diproduksi PT. Eb07 untuk mendapatkan laba maksimal dengan ($Z=30X_1 + 40X_2$)?
4. PT Yummy food memiliki sebuah pabrik yang akan memproduksi dua jenis produk yaitu vanila dan violet. Untuk memproduksi kedua produk tersebut diperlukan bahan baku A, bahan baku B dan jam tenaga kerja. Maksimum pengerjaan bahan baku A adalah 60kg per hari, bahan baku B 30kg per hari dan tenaga kerja 40 jam per hari. Kedua jenis produk memberikan sumbangan keuntungan sebesar Rp.40,00 untuk vanila dan Rp.30,00 untuk violet. Masalah yang dihadapi adalah bagaimana menentukan jumlah unit setiap produk yang akan diproduksi setiap hari.