

DUALITAS DALAM PROGRAM LINIER
DAN SENSITIVITAS

BAB4

Mata Kuliah :	Teknik Optimasi
Capaian Pembelajaran :	Mahasiswa mampu
Kemampuan Akhir Yang Diharapkan:	Mema
Alokasi Waktu:	3 x 50 menit
Pertemuan ke:	1 & 2
Indikator:	1.1 1.2

A. Teori Dualitas

Setiap program linier disukai sebagai problem aprimial,dapat dikonversi ke dalam problem adual yang menyediakan batas atas nilai optimal dari problema primal. Dalam bentuk matriks dapat diekspresikan sebagai berikut:

$$\text{maximize } c^T x$$

subject to $Ax \leq b, x \geq 0$ problema dual yang tepat adalah:

$$\text{minimize } b^T x$$

subject to $A^T y \geq c, y \geq 0$ dimana y digunakan sebagai pengganti variabel vektor.

Terdapat dua ide mendasar untuk teori dualitas. Salah satunya adalah dual dari program linier dual semula adalah program linier primal. Penambahannya adalah setiap solusi yang layak untuk program linier memberikan batas pada nilai optimal dari fungsi objektif dualitas. Kelemahan teorema dualitas bahwa nilai fungsi objektif dari dual pada solusi yang layak lebih baik atau sama dengan nilai fungsi objektif dari primal untuk solusi yang layak. Teorema dualitas yang kuat pada saat primal mempunyai solusi optimal x^* maka dual juga mempunyai solusi

optimal y^* sehingga

$$c^T x^* - b^T y^*$$

Program linier dapat juga tidak terbatas dan tidak layak. Teori dualitas mengatakan bahwa jika primal tidak terbatas maka dual tidak layak. Demikian juga jika dual tidak terbatas maka primal harus tidak layak. Atau mungkin juga untuk keduanya dual dan primal tidak layak.

B. Analisa Sensivitas

Seorang analis jarang dapat menentukan parameter model Program Linier seperti (m, n, C_j, a_{ij}, b_i) dengan pasti karena nilai parameter ini adalah fungsi dari beberapa *uncontrolable variable*. Sementara itu solusi optimal model Program Linier didasarkan pada parameter tersebut. Akibatnya

analisis perlu menga- mati pengaruh perubahan parameter tersebut terhadap solusi optimal. Analisa perubahan parameter dan pengaruhnya terhadap solusi Program Linier disebut analisis pasca optimal. Istilah post optimality menunjukkan bahwa analisa ini terjadi setelah diperoleh solusi optimal, dengan mengasumsikan seperangkat nilai parameter yang digunakan dalam model atau analisis pasca optimal (disebut juga analisis pasca optimal atau analisis setelah optimal, atau analisis kepekaan dalam suasana ketidaktahuan) merupakan suatu usaha untuk mempelajari nilai-nilai dari peubah-peubah pengambilan keputusan dalam suatu model matematika jika satu atau beberapa atau semua parameter model tersebut berubah atau menjelaskan pengaruh perubahan data terhadap penyelesaian optimal yang sudah ada.

Dapat diketahui bahwa dunia nyata yang diabstraksikan dan disimplifikasi- kan kedalam model PL, tidak sederhana seperti rumusan PL sederhana tersebut. Oleh karena itu dalam dunia pengelolaan dan kehidupan dunia nyata, selalu dihadapkan pada pertanyaan-pertanyaan keragu-raguan seperti apa yang akan ter- jadi, jika ini dan itu berubah? Persoalan peluang dan ketidak pastiaan pertanyaan- pertanyaan tersebut harus dapat dijawab dalam rangka meyakinkan pendirian terhadap sesuatu yang akan diputuskan kelak. Dengan demikian hasil yang diharapkan tersebut adalah hasil yang memang paling mungkin dan paling mendekati, atau perkiraan

yang paling tepat. Uji kepekaan hasil dan pasca optimal (sebut saja selanjutnya analisis postoptimal) yang dapat memberikan jawaban terhadap persoalan-persoalan tersebut diatas. Analisis postoptimal sangat berhubungan erat dengan atau mendekati apa yang disebut Program Parametri kala tau Analisis Parametrisasi.

Perubahan atau variasi dalam suatu persoalan Program Linier yang biasanya dipelajari melalui analisis pasca optimal dapat dipisahkan ke dalam tiga kelompok umum, yaitu:

- a) Analisa yang berkaitan dengan perubahan diskrit parameter untuk melihat berapa besar perubahan dapat ditolerir sebelum solusi optimal mulai kehilangan optimalitasnya, ini dinamakan *Analisis Sensitivitas*. Jika suatu perubahan kecil dalam parameter menyebabkan perubahan drastic dalam solusi, dikatakan bahwa solusi adalah sangat sensitif terhadap nilai parameter itu. Sebaliknya, jika perubahan parameter tidak mempunyai pengaruh besar terhadap solusi dikatakan solusi relative insensitive terhadap nilai parameter tersebut.

- b) Analisa yang berkaitan dengan perubahan struktural. Masalah ini muncul bila persoalan Program Linier dirumuskan kembali dengan menambahkan atau menghilangkan kendala dan atau variabel untuk

menunjukkan operasi model alternatif. Perubahan struktural ini dapat dimasukkan dalam analisa sensitivitas.

- c) Analisa yang berkaitan dengan perubahan kontinu parameter untuk menentukan urutan solusi dasar yang menjadi optimal jika perubahan ditambah lebih jauh, ini dinamakan program *Parametric*.

Diketahui Model Matematika Persoalan Program Linier adalah sebagai berikut: Menentukan nilai dari X_1, X_2, \dots, X_n sedemikian rupa sehingga:

$$Z = C_1X_1 + C_2X_2 + \dots + C_jX_j + \dots + C_nX_n =$$

(Optimal [maksimum/minimum])

Berdasarkan Model Matematika Persoalan Program Linier diatas analisis sensitivitas dapat dikelompokkan berdasarkan perubahan-perubahan parameter:

- a. Perubahan koefisien fungsi tujuan (C_j),
- b. Perubahan Koefisien teknologi (a_{ij})(koefisien input-output)
- c. Perubahan Nilai-Sebelah-Kanan (NSK) fungsi kendala (b_i),
- d. Adanya tambahan fungsi kendala baru (perubahan nilai m),
- e. Adanya tambahan perubahan (variabel) pengambilan

keputusan(X_j)(perubahan nilai n).

Analisis sensitivitas berkaitan dengan perubahan koefisien fungsi tujuan terhadap solusi optimal. Analisis ini terbagi dua yaitu pertama *reduced cost* dan kelayakan penambahan produk baru, yang kedua menjelaskan tentang perubahan koefisien fungsi tujuan agar solusi masih tetap optimal.

d) Analisis Sensitivitas: Reduced Cost dan Penentuan Kelayakan Penambahan Produk Baru

Reduced cost adalah besarnya perubahan nilai optimal fungsi tujuan jika produk yang mestinya tidak diproduksi (T) tetap diproduksi. Variabel yang tidak berada pada kolom *product mix* pada table optimal, disebut non-basic variabel. Dengan demikian, T merupakan non-basic variable.

Reduce cost adalah perubahan dalam nilai optimal fungsi tujuan karena penambahan 1 unit non-basic variabel. *Reduced cost* ini dapat dilihat pada baris $C_j - Z_j$ kolom non-basic variabel. Dalam memutuskan apakah akan menambah

Produk baru ataukah tidak, perusahaan harus mempertimbangkan factor biaya dan keuntungan dari adanya penambahan produk baru tersebut. Jika keuntungan $>$ biaya, sebaiknya rencana penambahan produk baru diteruskan, dan apabila

keuntungan < biaya sebaiknya dibatalkan.

Untuk penentuan kelayakan penambahan produk baru, jika perusahaan me- rencanakan untuk meluncurkan produk baru yang diproses dengan menggunakan mesin yang sudah ada, apakah produk tersebut layak untuk diproduksi ? Untuk menjawab pertanyaan ini, kita perlu mengevaluasi kelayakan produk tersebut dengan mempertimbangkan *cost* and *benefit* dengan adanya penambahan produk baru tersebut. Apabila *benefit* lebih besar daripada *cost* yang dikeluarkan, maka produk layak untuk diproduksi. Demikian jika terjadi sebaliknya, maka produk baru tidak diproduksi.

e) ***Analisis Sensitivitas: Rentang Perubahan Koefisien Fungsi Tujuan***

Koefisien fungsi tujuan mungkin saja berubah terlebih untuk kasus maksimisasi profit, dimana koefisien fungsi tujuan mencerminkan besarnya keuntungan per unit produk. Sehingga jika terjadi kenaikan biaya, sementara tingkat harga tetap akan mengakibatkan keuntungan per unit turun. Dengan kata lain, koefisien fungsi tujuan turun. Sebaliknya apabila terjadi kenaikan harga, sementara biaya tetap, maka akan mengakibatkan keuntungan per unit naik. Ini berarti koefisien fungsi tujuan naik.

Dalam analisis sensitivitas, perlakuan antara basic variable dan nonbasic variabel berbeda. Untuk non-basic variabel batas maksimum yang diperkenankan agar solusi masih tetap optimal tercermin pada baris Z_j kolom non-basic variabel pada table optimal.

Sedangkan untuk mengetahui rentang perubahan koefisien fungsi tujuan untuk basic variable kita bagian angka-angka pada baris $C_j - Z_j$ dengan angka-angka pada baris basic variabel yang sedang kita analisa. Hasil bagi positif terkecil menunjukkan besarnya keuntungan perunit yang boleh dinaikkan dan hasil bagi negative terkecil menunjukkan besarnya keuntungan perunit yang boleh diturunkan tanpa merubah solusi optimal.

C. Latihan Soal

Dari Contoh 1 $c_3 = 30$ diubah menjadi 115 * $c_3 = -$.
 Bagaimana pengaruh perubahan tersebut terhadap po soal asli. Penyelesaian: $\Delta c_3 = -145$ jadi $(0 \ 145) \Delta C = \Delta c_1 \ \Delta c_3 = -$.
 . Dihitung * * $j \ z - c$ untuk $j \ x$ bukan basis. Dalam hal ini adalah $2 \ x \ . \ * \ 2 \ * \ 2 \ z - c \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 = z - c + \Delta C Y - \Delta c = 135 + (0 -145) \ 0 \ 1 \ 3 - || \vee || \vee = 135 - 145 - 0 = -10 < 0$. Dengan cara sama diperoleh * $4 \ * \ 4 \ z - c = 53 \geq 0$ untuk variabel 1 y dan * $5 \ * \ 5 \ z - c = -36 < 0$ untuk variabel 2 y . $\Delta f = \Delta C X = (0 \ 145) \ 11600 \ 80 \ 560 = || \vee || \vee$. Dan nilai $f = f + \Delta f \max \ * \ \max = 30400 + 11600 = 42000$. Karena * $2 \ * \ 2 \ z - c = -10 < 0$ dan *

$5 * 5 z - c = -36 < 0$, maka tabel optimum soal asli belum optimum bagi soal berubah, sehingga perhitungan simpleks dilanjutkan, dengan memasukkan 2 y sebagai calon variabel basis baru.

$$\begin{array}{cccccccc}
 c_j & 50 & 45 & -115 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 x_i & x_1 & x_2 & x_3 & y_1 & y_2 & 50 & x \\
 1 & 1 & 3 & 0 & 3/5 & 1/5 & 560 & -115 \\
 x_3 & 0 & 1 & 1 & -1/5 & 2/5 & 80 & 400/13 \\
 z_j & 50 & 35 & -115 & 29 & -220 & z_j - c_j & 0 \\
 & -10 & 0 & 29 & -220 & b_i & R_i & 5554
 \end{array}$$
 Berarti po soal asli masih menjadi po soal berubah. Karena 1 c berubah dan 3 c tidak berubah, maka $\Delta f = \Delta CX = (20 \ 0) \begin{pmatrix} 11200 \\ 80 \\ 560 \end{pmatrix} = 22400 + 11200 = 33600$. Dan nilai $f = f + \Delta f \text{ max} * \text{max} = 30400 + 11200 = 41600$.

1. Perusahaan sepatu “IDEAL” membuat 2 macam sepatu. Yang pertama adalah sepatu dengan sol karet (X1), dan yang kedua adalah sepatu dengan sol dari kulit (X2). Untuk memproduksi kedua macam sepatu tersebut perusahaan menggunakan 3 jenis mesin. Mesin 1 = khusus untuk membuat sepatu karet, dengan kapasitas max = 8 jam. Mesin 2 = khusus untuk membuat sepatu dari kulit, dengan kapasitas max = 15 jam. Mesin 3 = khusus untuk assembling kedua macam sepatu tersebut, dengan kapasitas max = 30 jam.
 - Ø Setiap lusin X1 mula-mula dikerjakan di mesin 1 selama 2 jam dan selanjutnya menuju mesin 3 selama 6 jam. Sedangkan X2 dikerjakan oleh mesin 2 selama 3 jam dan langsung ke mesin 3 selama 5 jam.
 - Ø Sumbangan terhadap laba untuk setiap sepatu X1 =

Rp. 30.000 sedangkan sepatu X2 = Rp. 50.000.

Ø Untuk mendapatkan hasil yang optimal, berapakah sepatu X1 dan X2 yang harus diproduksi?

2. Dari Contoh 1 bila $c_1 = 50$ diubah menjadi 70 * $c_1 =$ dan $c_2 = 45$ diubah menjadi 75 * $c_2 =$. Bagaimana pengaruh perubahan tersebut terhadap po soal asli?.
3. Memaksimumkan $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3$ Terhadap kendala $2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 1200$ $x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 800$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$. Setelah PO diperoleh, tambahkan $\Delta b_1 = 300$ dan $\Delta b_2 = 200$ kepada suku tetap dan selidiki pengaruhnya?
4. Dari Contoh 1 diadakan perubahan terhadap soal aslinya dengan mengganti $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = A_2$ menjadi $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = 1 * A_2$. Tentukan pengaruhnya?