KONSEP DASAR PROBABILITAS

BILANGAN FAKTORIAL

Bilangan faktorial ditulis n!

Rumus :

$$n! = n(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1$$

dimana : $0! = 1$ dan $1! = 1$

Contoh :

$$5! = 5.(5-1).(5-2).(5-3).(5-4) = 5.4.3.2.1$$

$$= 120$$

PERMUTASI

Susunan-susunan yang dibentuk dari anggota-anggota suatu himpunan dengan mengambil seluruh atau sebagian anggota himpunan dan **memberi arti pada urutan anggota** dari masing-masing susunan tersebut.

Permutasi ditulis dengan **P**.

PERMUTASI (lanjutan)

Bila himpunan terdiri dari n anggota dan diambil sebanyak r, maka banyaknya susunan yang dapat dibuat adalah :

$$ {}_{n}P_{r} = \frac{n!}{(n-r)!} $$

Contoh :

Bila n=4 dan r=2, maka

$$ {}_{4}P_{2} = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = \frac{4.3.\cancel{2!}}{\cancel{2!}} = 12 $$

PERMUTASI (lanjutan)

Bila himpunan tersebut mempunyai anggota yang sama, maka banyak permutasi yang dapat dibuat adalah :

$$\binom{n}{n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1!\, n_2!\, n_3! \ldots n_k!}$$

dimana $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k = n$

Contoh :

Berapa banyak susunan yang dapat dibuat dari kalimat TEKNIK ELEKTRONIKA?

Banyak n=17

huruf A = n1 = 1	huruf K = n4 = 4	huruf O = n7 = 1
huruf E = n2 = 3	huruf L = n5 = 1	huruf R = n8 = 1
huruf I = n3 = 2	huruf N = n6 = 2	huruf T = n9 = 2

Maka banyak permutasi adalah :

$$\binom{17}{1,3,2,4,1,2,1,1,2} = \frac{17!}{1!3!2!4!1!2!1!1!2!} = 411.675.264.000$$

KOMBINASI

Susunan-susunan yang dibentuk dari anggota-anggota suatu himpunan dengan mengambil seluruh atau sebagian dari anggota himpunan itu **tanpa memberi arti pada urutan** anggota dari masing-masing susunan tersebut.

Kombinasi ditulis dengan **C.**

KOMBINASI (lanjutan)

Bila himpunan terdiri dari n anggota dan diambil sebanyak r, maka banyaknya susunan yang dapat dibuat adalah :

$$ {}_{n}C_{r} = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} $$

Contoh :

Bila n=4 dan r=2, maka

$$ {}_{4}C_{2} = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4.3.\cancel{2!}}{1.2.\cancel{2!}} = 6 $$

KOMBINASI (lanjutan)

Contoh :

Dalam suatu kelompok terdiri dari 4 orang ahli mesin dan 3 orang ahli elektronika. Buatlah juri yang terdiri dari 2 orang ahli elektronika dan 1 orang ahli mesin!

Jawab :

$${}_4C_1 = \binom{4}{1} = \frac{4!}{1!(4-1)!} = \frac{4!}{1!3!} = \frac{4.\cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 4$$

$${}_3C_2 = \binom{3}{2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{3!}{2!1!} = \frac{3.\cancel{2!}}{\cancel{2!}} = 3$$

Banyaknya jenis juri yang dapat dibentuk adalah 4 x 3 = 12 jenis juri.

LATIHAN

1. Dalam berapa cara 6 kelereng yang warnanya berbeda dapat disusun dalam satu baris?
2. Dari kelompok ahli ada 5 orang sarjana ekonomi dan 7 sarjana hukum. Akan dibuat tim kerja yang terdiri atas 2 sarjana ekonomi dan 3 sarjana hukum. Berapa banyak cara untuk membuat tim itu jika :

   a. tiap orang dapat dipilih dengan bebas

   b. seorang sarjana hukum harus ikut dalam tim itu

   c. dua sarjana ekonomi tidak boleh ikut dalam tim itu

KONSEP PROBABILITAS

- Banyaknya kejadian yang sulit diketahui dengan pasti.
- Akan tetapi kejadian tersebut dapat kita ketahui akan terjadi dengan melihat fakta-fakta yang ada.
- Dalam statistika fakta-fakta tersebut digunakan untuk mengukur **derajat kepastian atau keyakinan** yang disebut dengan **Probabilitas atau Peluang** dan dilambangkan dengan **P**.

PERUMUSAN PROBABILITAS

Bila kejadian E terjadi dalam m cara dari seluruh n cara yang mungkin terjadi dimana masing-masing n cara tersebut mempunyai kesempatan atau kemungkinan yang sama untuk muncul, maka probabilitas kejadian E adalah :

$$P(E) = \frac{m}{n}$$

PERUMUSAN PROBABILITAS (lanjutan)

Contoh :

Hitung probabilitas memperoleh kartu hati bila sebuah kartu diambil secara acak dari seperangkat kartu bridge yang lengkap!

Jawab:

Jumlah seluruh kartu = 52

Jumlah kartu hati = 13

Misal E adalah kejadian munculnya kartu hati, maka :

$$P(E) = \frac{m}{n} = \frac{13}{52}$$

RUANG SAMPEL DAN KEJADIAN

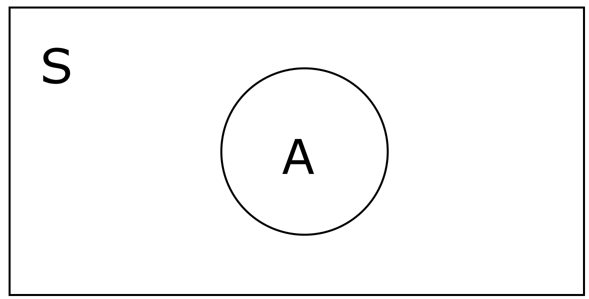
Ruang sampel adalah himpunan dari semua hasil yang **mungkin muncul** atau terjadi pada suatu percobaan statistik.

Ruang sampel dilambangkan dengan S dan anggota-anggotanya disebut titik sampel.

Kejadian adalah himpunan dari hasil **yang muncul** atau terjadi pada suatu percobaan statistik.

Kejadian dilambangkan dengan A dan anggota-anggotanya disebut juga titik sampel.

RUANG SAMPEL DAN KEJADIAN (lanjutan)



Ruang sampel S	⟷	Himpunan semesta S
Kejadian A	⟷	Himpunan bagian A
Titik sampel	⟷	Anggota himpunan

RUANG SAMPEL DAN KEJADIAN (lanjutan)

Bila kejadian A terjadi dalam m cara pada ruang sampel S yang terjadi dalam n cara maka probabilitas kejadian A adalah :

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{m}{n}$$

dimana :

n(A) = banyak anggota A

n(S) = banyak anggota S

RUANG SAMPEL DAN KEJADIAN (lanjutan)

Contoh :

Pada pelemparan 2 buah uang logam :

a. Tentukan ruang sampel!
b. Bila A menyatakan kejadian munculnya sisi-sisi yang sama dari 2 uang logam tersebut, tentukan probabilitas kejadian A!

Jawab :

a. Ruang sampelnya :

		Uang logam 2	
		g	a
Uang Logam 1	g	(g,g)	(g,a)
	a	(a,g)	(a,a)

b. A = {(,g,g),(a,a)} , maka n(A) = 2 dan n(S) = 4, sehingga probabilitas kejadian A adalah :

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

RUANG SAMPEL DAN KEJADIAN (lanjutan)

Latihan :

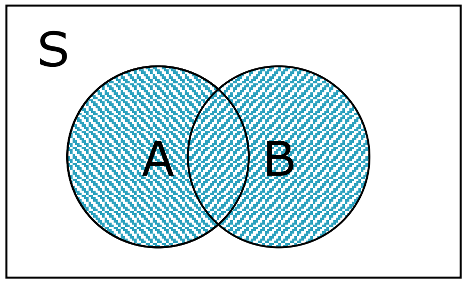
Pada pelemparan dua buah dadu :

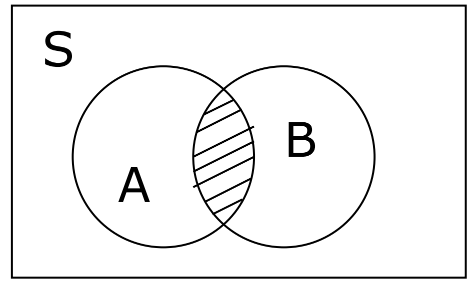
a. Tentukan ruang sampelnya!
b. Bila A menyatakan kejadian munculnya dua dadu dengan muka sama, tentukan P(A)!
c. Bila B menyatakan kejadian munculnya jumlah muka dua dadu kurang dari 5, tentukan P(B)!
d. Bila C menyatakan kejadian munculnya jumlah muka dua dadu lebih dari sama dengan 7, tentukan P(C)!

SIFAT PROBABILITAS KEJADIAN A

- Bila $0<P(A)<1$, maka $n(A)$ akan selalu lebih sedikit dari $n(S)$
- Bila $A = 0$, himpunan kosong maka A tidak terjadi pada S dan $n(A)=0$ sehingga $P(A) = 0$
- Bila $A = S$, maka $n(A)=n(S)=n$ sehingga $P(A) = 1$

PERUMUSAN PROBABILITAS KEJADIAN MAJEMUK





Maka banyak anggota himpunan gabungan A dan B adalah :

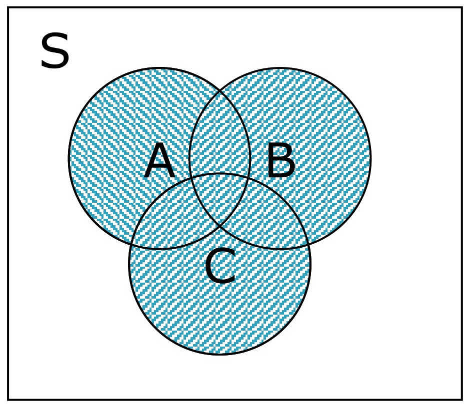
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Kejadian majemuk adalah gabungan atau irisan kejadian A dan B, maka probabilitas kejadian gabungan A dan B adalah:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

PERUMUSAN PROBABILITAS KEJADIAN MAJEMUK (lanjutan)

Untuk 3 kejadian maka :



Maka Probabilitas majemuknya adalah :

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

PERUMUSAN PROBABILITAS KEJADIAN MAJEMUK (lanjutan)

Contoh 1 :

Diambil satu kartu acak dari satu set kartu bridge yang lengkap. Bila A adalah kejadian terpilihnya kartu As dan B adalah kejadian terpilihnya kartu wajik, maka hitunglah

Jawab : $P(A \cup B)$

$$P(A) = \frac{4}{52}\ ,\ P(B) = \frac{13}{52}\ ,\ P(A \cap B) = \frac{1}{52}\ \text{(kartu As wajik)}$$

$$\text{Maka } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$$

PERUMUSAN PROBABILITAS KEJADIAN MAJEMUK (lanjutan)

Contoh 2 :

Peluang seorang mahasiswa lulus Kalkulus adalah 2/3 dan peluang ia lulus Statistika adalah 4/9. Bila peluang lulus sekurang-kurangnya satu mata kuliah di atas adalah 4/5, berapa peluang ia lulus kedua mata kuliah tersebut?

Jawab :

Misal A = kejadian lulus Kalkulus

B = kejadian lulus Statistika

$$P(A)=\frac{2}{3}\ ,\ P(B)=\frac{4}{9}\ ,\ P(A\cup B)=\frac{4}{5}$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

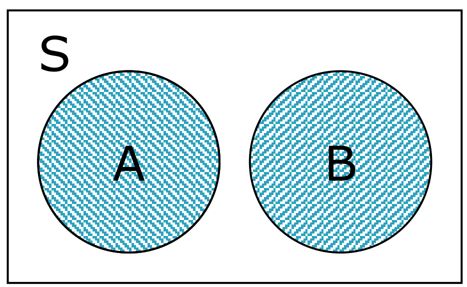
$$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$$

$$=\frac{2}{3}+\frac{4}{9}-\frac{4}{5}=\frac{14}{45}$$

DUA KEJADIAN SALING LEPAS

Bila A dan B adalah dua kejadian sembarang pada S dan berlaku $A \cap B = 0$ maka A dan B dikatakan dua kejadian yang saling lepas.

Dua kejadian tersebut tidak mungkin terjadi secara bersamaan.



Dengan demikian probabilitas $A \cup B$ adalah :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

DUA KEJADIAN SALING LEPAS (lanjutan)

Contoh :

Pada pelemparan dua buah dadu, tentukan probabilitas munculnya muka dua dadu dengan jumlah 7 atau 11!

Jawab :

Misal A = kejadian munculnya jumlah 7

B = kejadian munculnya jumlah 11

Tentukan ruang sampelnya dulu! Dari ruang sampel akan diperoleh :

A = {(6,1),(5,2),(4,3),(2,5)}

B = {(6,5),(5,6)}

Maka $P(A \cap B) = 0$ yang berarti A dan B saling lepas.

P(A) = 4/36 , P(B)=2/36 sehingga

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{4}{36} + \frac{2}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

DUA KEJADIAN SALING LEPAS (lanjutan)

Contoh :

Pada pelemparan dua buah dadu, tentukan probabilitas munculnya muka dua dadu dengan jumlah 7 atau 11!

Jawab :

Misal A = kejadian munculnya jumlah 7

B = kejadian munculnya jumlah 11

Tentukan ruang sampelnya dulu! Dari ruang sampel akan diperoleh :

A = {(6,1),(5,2),(4,3),(2,5),(1,6),(3,4)}

B = {(6,5),(5,6)}

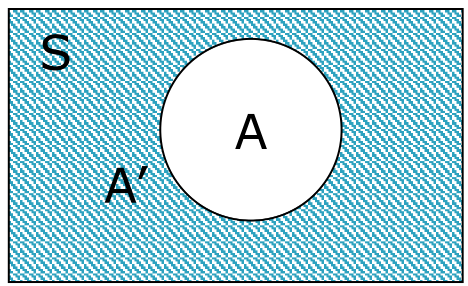
Maka $P(A \cap B) = 0$ yang berarti A dan B saling lepas.

P(A) = 6/36 , P(B)=2/36 sehingga

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{6}{36} + \frac{2}{36} = \ 8/36$$

DUA KEJADIAN SALING KOMPLEMENTER

Bila $A \subseteq S$ maka A^c atau A’ adalah himpunan S yang bukan anggota A.



Dengan demikian

$A \cap A' = 0$ dan $A \cup A' = S$

Rumus probabilitasnya : $P(A') = 1 - P(A)$

DUA KEJADIAN SALING KOMPLEMENTER

Latihan

Sebuah kotak berisi 8 bola merah, 7 bola putih, dan 5 bola biru. Jika diambil 1 bola secara acak, tentukan probabilitas terpilihnya:

a. Bola merah

b. Bola putih

c. Bola biru

d. Tidak merah

e. Merah atau putih

DUA KEJADIAN SALING BEBAS

Dua kejadian A dan B dalam ruang sampel S dikatakan saling bebas jika kejadian A tidak mempengaruhi kejadian B dan sebaliknya kejadian B juga tidak mempengaruhi kejadian A.

Rumus :

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

DUA KEJADIAN SALING BEBAS (lanjutan)

Contoh :

Pada pelemparan dua buah dadu, apakah kejadian munculnya muka $X<=3$ dadu I dan kejadian munculnya muka $Y>=5$ dadu II saling bebas?

Jawab :

A= kejadian munculnya muka $X<=3$ dadu I

B= kejadian munculnya muka $Y>=5$ dadu II

Dari ruang sampel diperoleh :

A={(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6), (2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5), (2,6), (3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6)}

B={(1,5),(2,5),(3,5),(4,5),(5,5),(6,5),(1,6),(2,6),(3,6), (4,6),(5,6),(6,6)}

$$A \cap B = \{(1,5),(2,5),(3,5)(1,6),(2,6),(3,6)\}$$

Maka diperoleh

$$P(A \cap B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

P(A) = 18/36 = ½ dan P(B) = 12/36 = 1/3

Tetapi juga berlaku

maka A dan B saling bebas. $P(A \cap B) = \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.\frac{1}{3} = P(A).P(B)$

PROBABILITAS BERSYARAT

Kejadian A terjadi dengan syarat kejadian B lebih dulu terjadi, dikatakan kejadian A bersyarat B dan ditulis A/B.

Probabilitas terjadinya A bila kejadian B telah terjadi disebut probabilitas bersyarat P(A/B).

Rumusnya :

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad , P(B) > 0$$

PROBABILITAS BERSYARAT (lanjutan)

Contoh :

Diberikan populasi sarjana disuatu kota yang dibagi menurut jenis kelamin dan status pekerjaan sebagai berikut :

	Bekerja	Menganggur	Jumlah
Laki-laki	460	40	500
Wanita	140	260	400
Jumlah	600	300	900

Akan diambil seorang dari mereka untuk ditugaskan melakukan promosi barang. Ternyata yang terpilih adalah dalam status bekerja, berapakah probabilitasnya bahwa dia :

a. Laki–laki   b. wanita

PROBABILITAS BERSYARAT (lanjutan)

Jawab :

A=kejadian terpilihnya sarjana telah bekerja

B=kejadian bahwa dia laki-laki

a.

$$n(A \cap B) = 460 \text{ maka } P(A \cap B) = \frac{460}{900}$$

$$n(A) = 600 \text{ maka } P(A) = \frac{600}{900}$$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{460}{600} = \frac{23}{30}$$

b. Cari sendiri!

PROBABILITAS BERSYARAT
Untuk Kejadian Saling Bebas

Bila A dan B dua kejadian dalam ruang sampel S yang saling bebas dengan P(A)=0 dan P(B)=0 maka berlaku :

$$P(A/B) = P(A) \text{ dan } P(B/A) = P(B)$$

Bila

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \text{ , maka}$$

$$P(A \cap B) = P(A/B).P(B)$$

Untuk kejadian A,B, dan C maka :

$$P(A \cap B \cap C) = P(A/B \cap C).P(B/C).P(C)$$

PROBABILITAS BERSYARAT
Untuk Kejadian Saling Bebas

Contoh :

Misal kita mengambil 3 kartu (diambil 3 kali) pada kartu bridge yang lengkap. Setiap mengambil kartu, kartu yang terpilih tidak dikembalikan pada kelompok kartu tersebut. Hal ini dikatakan pengambilan kartu tanpa pengembalian. Tentukanlah probabilitas untuk memperoleh 3 kartu As!

PROBABILITAS BERSYARAT
Untuk Kejadian Saling Bebas

Jawab :

S = kumpulan kartu dimana n(S) = 52

A = terpilih kartu As pada pengambilan pertama

B/A = terpilih kartu As pada pengambilan kedua dengan syarat pada pengambilan pertama terpilih kartu As

$C/A \cap B$ = terpilih kartu As pada pengambilan ketiga dengan syarat pada pengambilan pertama dan kedua terpilih kartu As

PROBABILITAS BERSYARAT
Untuk Kejadian Saling Bebas

Pengambilan 1 : n(A)=4 dan n(S)=52

Pengambilan 2 : n(B/A)=3 dan n(S)=51

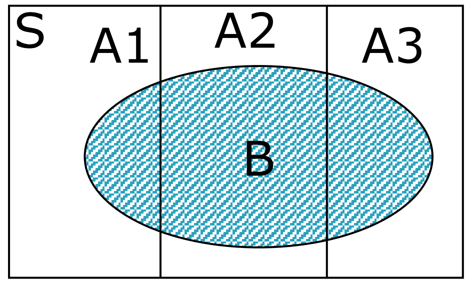
Pengambilan 3 : n(C/ $A \cap B$)=2 dan n(S)=50

Maka :

$$P(A \cap B \cap C) = P(C/A \cap B).P(B/A).P(A)$$

$$= \frac{2}{50} \cdot \frac{3}{51} \cdot \frac{4}{52} = \frac{1}{5.525}$$

RUMUS BAYES



A1, A2, A3 adalah tiga kejadian yang saling lepas.
Maka kejadian B dapat ditentukan :

$$B = (B \cap A1) \cup (B \cap A2) \cup (B \cap A3)$$

maka probabilitas B adalah

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B \cap A1) \cup P(B \cap A2) \cup P(B \cap A3) \\ &= P(B/A1).P(A1) + P(B/A2).P(A2) + P(B/A3).P(A3) \\ &= \sum_{i=1}^{3} P(B/Ai).P(Ai) \end{aligned}$$

RUMUS BAYES (lanjutan)

Probabilitas kejadian bersyarat :

$$P(A1/B) = \frac{P(B \cap A1)}{P(B)} = \frac{P(B/A1).P(A1)}{\sum P(B/Ai).P(Ai)}$$

$$P(A2/B) = \frac{P(B \cap A2)}{P(B)} = \frac{P(B/A2).P(A2)}{\sum P(B/Ai).P(Ai)}$$

$$P(A3/B) = \frac{P(B \cap A3)}{P(B)} = \frac{P(B/A3).P(A3)}{\sum P(B/Ai).P(Ai)}$$

RUMUS BAYES (lanjutan)

Secara umum bila A1,A2,…,An kejadian saling lepas dalam ruang sampel S dan B adalah kejadian lain yang sembarang dalam S, maka probabilitas kejadian bersyarat Ai/B adalah :

$$P(Ai/B) = \frac{P(B \cap Ai)}{P(B)} = \frac{P(B/Ai).P(Ai)}{\sum_{i=1}^{n} P(B/Ai).P(Ai)}$$

RUMUS BAYES (lanjutan)

Contoh :

Ada 3 kotak yang masing–masing berisi 2 bola. Kotak I berisi 2 bola merah, kotak II berisi 1 bola merah dan 1 bola putih, dan kotak III berisi 2 bola putih.

Dengan mata tertutup anda diminta mengambil satu kotak secara acak dan kemudian mengambil bola 1 bola secara acak dari kotak yang terambil tersebut. Anda diberitahu bahwa bola yang terambil ternyata berwarna merah. Berapakah peluangnya bola tersebut terambil dari kotak I, II, dan III?

RUMUS BAYES (lanjutan)

Jawab :
A1 = kejadian terambilnya kotak I
A2 = kejadian terambilnya kotak II
A3 = kejadian terambilnya kotak III
B = kejadian terambilnya bola merah
Ditanya : P(A1/B), P(A2/B), dan P(A3/B)
Karena diambil secara acak maka :
P(A1)=P(A2)=P(A3)=1/3
Probabilitas terambilnya bola merah dari kotak I adalah P(B/A1)=1.
Probabilitas terambilnya bola merah dari kotak II adalah P(B/A2)=1/2.
Probabilitas terambilnya bola merah dari kotak III adalah P(B/A3)=0.
P(B)= P(B/A1).P(A1)+P(B/A2).P(A2)+P(B/A3).P(A3)
= 1.1/3 + 1/2.1/3 + 0.1/3
= 1/2

RUMUS BAYES (lanjutan)

Jadi :

$$P(A1/B)=\frac{P(B\cap A1)}{P(B)}=\frac{P(B/A1).P(A1)}{P(B)}=\frac{(1)\left(\frac{1}{3}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{2}{3}$$

$$P(A2/B)=\frac{P(B\cap A2)}{P(B)}=\frac{P(B/A2).P(A2)}{P(B)}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{3}$$

$$P(A3/B)=\frac{P(B\cap A3)}{P(B)}=\frac{P(B/A3).P(A3)}{P(B)}=\frac{(0)\left(\frac{1}{3}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)}=0$$

LATIHAN

1. Diketahui banyak mahasiswa dari 500 mahasiswa yang mengikuti mata kuliah :
   - Matematika = 329
   - Statistika = 186
   - Fisika = 295
   - Matematika dan Statistika = 83
   - Matematika dan Fisika = 217
   - Statistika dan Fisika = 63

   Berapa mahasiswa yang mengikuti :

   a. 3 mata kuliah tersebut?
   b. Matematika tetapi tidak Fisika?
   c. Statistika tetapi tidak Matematika?
   d. Fisika tetapi tidak Statistika?
   e. Matematika atau Fisika tetapi tidak Statistika?
   f. Matematika tetapi tidak Statistika atau Fisika?

LATIHAN (lanjutan)

2. Dua kartu diambil secara acak (satu-satu) dari kumpulan kartu Bridge lengkap yang telah dikocok. Tentukan probabilitas untuk memperoleh 2 kartu As jika :

   a. Pengambilan kartu pertama dikembalikan

   b. Pengambilan kartu pertama tidak dikembalikan

3. Tiga kartu diambil secara acak (satu-satu) dari kumpulan kartu Bridge lengkap yang telah dikocok. Tentukan probabilitas kejadian terambilnya :

   a. 2 kartu Jack dan 1 kartu King

   b. 3 kartu dari satu jenis

   c. Paling sedikit 2 kartu As

LATIHAN (lanjutan)

4. Diberikan 2 kejadian X dan Y.
   P(X)=0,32 ; P(Y)=0,44 ; $P(X \cap Y) = 0,88$
   a. Apakah X dan Y saling lepas?
   b. Apakah X dan Y saling bebas?
5. Suatu perusahaan besar menyediakan 3 hotel bagi akomodasi rekanannya. Dari catatan sebelumnya diketahui bahwa 20% rekanannya diinapkan dihotel A, 50% dihotel B, dan 30% dihotel C.

   Bila 5% diantara kamar-kamar dihotel A, 4% di hotel B, dan 8% dihotel C terdapat kerusakan pipa air di kamar mandinya, hitung peluang bahwa :

   a. seorang rekanan mendapat kamar dengan pipa air yang rusak!

   b. seorang rekanan yang diketahui mendapat kamar dengan pipa air yang rusak ternyata menginap di hotel A!

TERIMA KASIH