PENAKSIRAN (ESTIMASI)

POKOK BAHASAN

- Pengertian dan Konsep Dasar Estimasi
- Estimasi Mean Populasi
- Estimasi Persentase Populasi
- Estimasi Varians Populasi
- Penentuan Ukuran Sampel

1. Pengertian dan Konsep Dasar Estimasi

1.1 Estimate, Estimator dan Estimasi

- Estimate (hasil Estimasi) adalah sebuah nilai spesifik atau kuantitas dari suatu statistik seperti: nilai mean sampel, persentase sampel dan varians sampel.

- Estimator adalah setiap statistik (mean sampel, persentase sampel dan varians sampel, dll) yang digunakan untuk mengestimasi sebuah parameter.

- Estimasi adalah keseluruhan proses yang menggunakan sebuah estimator untuk menghasilkan sebuah estimate dari suatu parameter.

Jenis Estimasi

1. **Estimasi Titik**

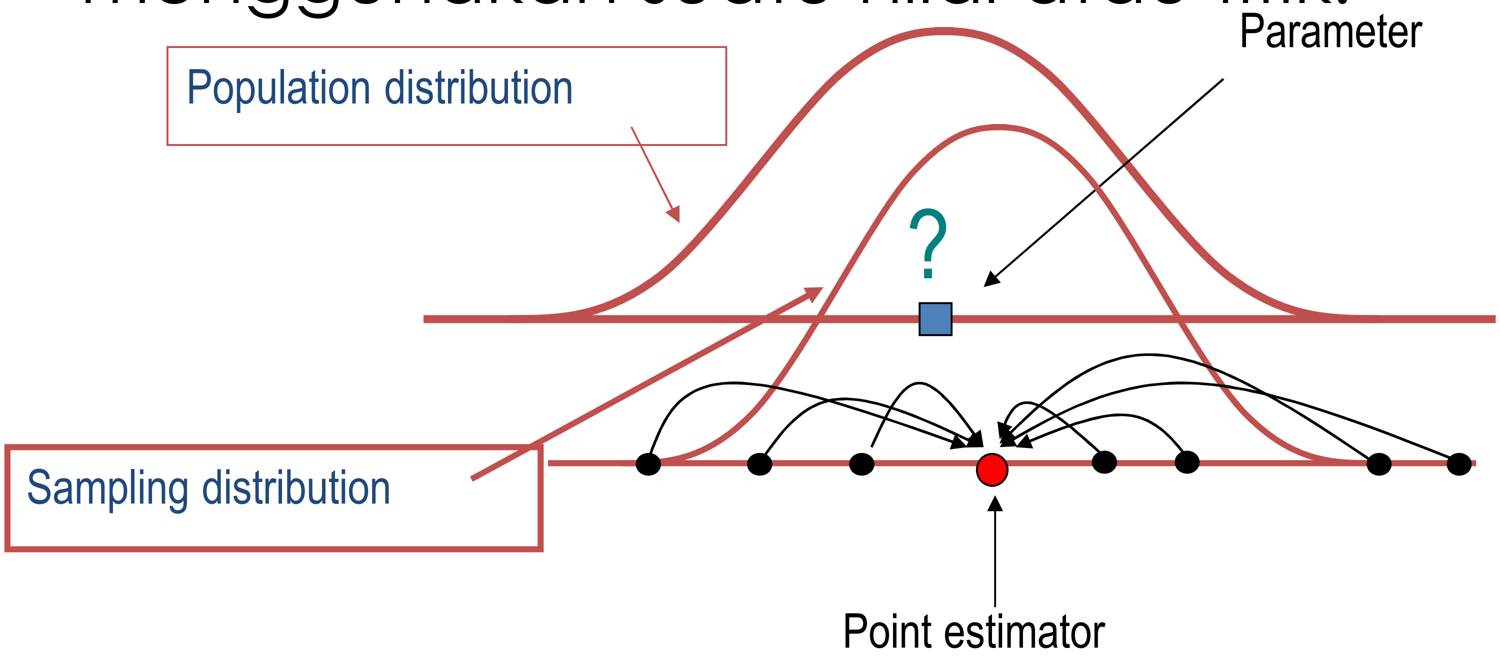
Sebuah estimasi titik dari sebuah parameter θ adalah suatu angka tunggal yg dapat dianggap sebagai nilai yg masuk akal bagi θ.

2. **Estimasi Interval**

Sebuah estimasi interval dari sebuah parameter θ adalah suatu sebaran nilai-nilai yg digunakan untuk mengestimasi θ.

Point Estimator

Estimator titik menghasilkan kesimpulan statistik mengenai suatu populasi dengan mengestimasi nilai dari suatu parameter yang tidak diketahui dengan menggunakan suatu nilai atau titik.



Contoh

Ex:

The scores of 50 students of mid test value Identify the target **parameter** and the **point estimator** if 10 randomly choosen of student!

39	48	55	63	66	68	68	69	70	71
71	71	73	74	76	76	76	77	78	79
79	79	79	80	80	82	83	83	83	85
85	86	86	88	88	88	88	89	89	89
90	91	92	92	93	95	96	97	97	99

The scores of 50 students of mid test value
Identify the target **parameter** and the **point estimator** if 10 randomly chosen of student!

Randomly chosen

39	48	55	63	66	68	68	69	70	71
71	71	73	74	76	76	76	77	78	79
79	79	79	80	80	82	83	83	83	85
85	86	86	88	88	88	88	89	89	89
90	91	92	92	93	95	96	97	97	99

$$\hat{x} = \bar{x} = E(x) = \mu = \frac{55 + 71 + 76 + 77 + 85 + \ldots + 96}{10} = 81.5$$

$$s^2 = E(s^2) = \sigma^2 = \frac{(55 - 81{,}5)^2 + (71 - 81{,}5)^2 + \ldots + (96 - 81{,}5)^2}{9} = 146{,}056$$

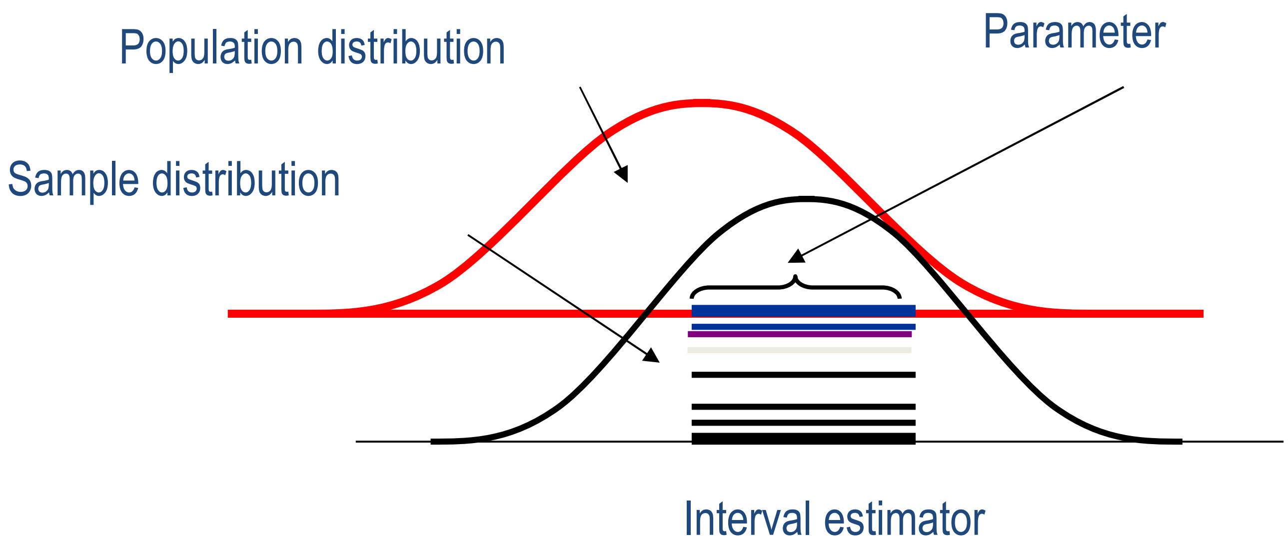
How about population ?

$$\mu = \frac{39 + 48 + 63 + \ldots. + 97 + 99}{50} = 79{,}98$$

$$\sigma^2 = \frac{(39 - 79{,}98)^2 + (48 - 79{,}98)^2 + \ldots.. + (97 - 79{,}98)^2 + (99 - 79{,}98)^2}{49} = 152{,}387$$

Interval Estimator

Suatu estimasi interval menggambarkan kesimpulan dari suatu populasi dengan mengestimasi suatu nilai yang ingin diketahui dengan menggunakan suatu interval



1.2 Konsep Dasar Estimasi Interval Mean Populasi

1. Distribusi Sampling
2. Pertimbangan Lebar Interval

$$\bar{x} - z\sigma_{\bar{x}} < \mu_x < \bar{x} + z\sigma_{\bar{x}}$$

3. Tingkat Kepercayaan

Tingkat Kepercayaan	Skor Z	Bentuk umum estimate interval
90 %	1,645	$\bar{x} - 1{,}645\sigma_{\bar{x}} < \mu_x < \bar{x} + 1{,}645\sigma_{\bar{x}}$
95 %	1,960	$\bar{x} - 1{,}960\sigma_{\bar{x}} < \mu_x < \bar{x} + 1{,}960\sigma_{\bar{x}}$
99 %	2,575	$\bar{x} - 2{,}575\sigma_{\bar{x}} < \mu_x < \bar{x} + 2{,}575\sigma_{\bar{x}}$

µx : Mean populasi

$\sigma_{\bar{x}}$: error standar dari mean

Z : nilai skor z yg ditentukan dg probabilitas estimate interval

2. Estimasi Mean Populasi

Terdapat beberapa hal yg terlebih dahulu harus diperhatikan yaitu:

1. Ukuran sampel (apakah besar n>30 atau kecil n<30)
2. Informasi tentang distribusi populasinya (apakah distribusi normal atau tidak)
3. Deviasi standard populasinya (diketahui atau tidak)
4. Pemilihan jenis distribusi yg menjadi dasar estimasi.

2.1 Mengestimasi Mean jika Deviasi Standard diketahui dan Jumlah Data Lebih dari 30 (n>30)

- Jika anggota populasinya tak terhingga:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$$

- Jika anggota populasinya terhingga sejumlah N:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

- Selanjutnya estimate interval mean populasi dapat dibentuk dg cara sbb:

$$\bar{x} - z\sigma_{\bar{x}} < \mu_x < \bar{x} + z\sigma_{\bar{x}}$$

Contoh:

Seorang manajer di perusahaan kertas “papirus” ingin mengestimasi waktu rata-rata yg dibutuhkan oleh sebuah mesin baru untuk memproduksi satu rim kertas. Suatu sampel acak sejumlah 36 rim menunjukkan bahwa rata-rata waktu yg dibutuhkan adalah 1,5 menit untuk setiap rimnya. Informasi dari perusahaan pembuat mesin menyatakan bahwa deviasi standard dari waktu produksi adalah 0,3 menit dan manajer itu mengasumsikan hal yg sama dalam estimasinya. Maka tentukanlah estimate interval dg tingkat kepercayaannya 95 %!

Jawab:

$\bar{x}$ = 1,5 ; σ_x = 0,3 ; n = 36 ; tingkat kepercayaan = 95%

Error standard-nya:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} = \frac{0,3}{\sqrt{36}} = 0,05$$

TK = 95 %, maka dg melihat tabel nilai z = 1,96.

Jadi estimate interval dari nilai rata-rata sesungguhnya adalah:

$$\bar{x} - z\sigma_{\bar{x}} < \mu_x < \bar{x} + z\sigma_{\bar{x}}$$

$$1,5 - (1,96)(0,05) < \mu_x < 1,5 + (1,96)(0,05)$$

$$1,402 < \mu_x < 1,598$$

Dg kata lain, sang manajer mengestimasi dg tingkat keyakinan 95 % bahwa waktu rata-rata untuk memproduksi 1 rim kertas dg mesin yg baru tersebut adalah antara 1,402 menit sampai 1,598 menit.

Latihan soaL

Perusahaan dagang pipa “prima” menerima pengiriman 100 batang pipa, dan petugas pemeriksa dari bagian kendali mutu ingin mengestimasi diameter rata-rata pipa tersebut untuk mengetahui apakah pipa-pipa tersebut memenuhi standard minimum. Petugas pemeriksa tersebut mengambil 50 pipa sebagai sampel dan diperoleh dari sampel itu rata-rata diameter adalah 2,55 inci. Dari data pengiriman selama ini deviasi standard dimeter pipa yang diterima adakah 0,07 inci. Maka tentukanlah estimate interval dg tingkat kepercayaan 99%!

Hasil akhir: ($2{,}532 < \mu_x < 2{,}568$)

2.2 Mengestimasi Mean jika Deviasi Standard Tidak diketahui dan Jumlah Data Lebih dari 30 (n>30)

Jadi deviasi standard populasi harus diestimasi juga bersama-sama dg mean populasinya:

$$s = \sqrt{\frac{\sum(x - \bar{x})^2}{n-1}}$$

Error standard dapat diestimasi sbb:

- Jika anggota populasinya tak terhingga: $\sigma_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$
- Jika anggota populasinya terhingga sejumlah N: $\sigma_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$
- Selanjutnya estimate interval mean populasi dapat dibentuk dg cara sbb: $\bar{x} - z\sigma_{\bar{x}} < \mu_x < \bar{x} + z\sigma_{\bar{x}}$

Contoh

Data pengujian kekuatan tarik dari 40 sampel jenis logam adalah sbb:

923	1051	1090	1141	1162	1196	1225	1264	1302	1368
924	1051	1094	1146	1163	1197	1231	1270	1303	1393
931	1055	1095	1146	1170	1200	1233	1273	1312	1399
939	1055	1106	1150	1171	1205	1233	1273	1314	1406

Maka estimasi rata-rata kekuatan tarik sesungguhnya (populasi) dari logam tersebut dapat dihitung dg tingkat kepercayaan 90% yaitu:

$$\bar{x} = \frac{923 + 924 + 931 + \ldots + 1399 + 1406}{40} = 1179$$

$$s = \sqrt{\frac{(923-1179)^2 + (924-1179)^2 + \ldots + (1399-1179)^2 + (1406-1179)^2}{40-1}} = 128$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{128}{\sqrt{40}} = 20{,}24$$

Dg TK = 90%, nilai z = 1,645. Jadi estimasi interval dari kekuatan rata-rata sesungguhnya adalah:

$$\bar{x} - z\sigma_{\bar{x}} < \mu_x < \bar{x} + z\sigma_{\bar{x}}$$

$$1179 - (1{,}645)(20{,}24) < \mu_x < 1179 + (1{,}645)(20{,}24)$$

$$1145{,}705 < \mu_x < 1212{,}295$$

2.3 Mengestimasi Mean dg Ukuran Sampel Kurang dari 30 (n<30)

Estimate interval dari mean populasinya berbentuk:

$$\bar{x} - t_{\alpha/2,v}\,\sigma_{\bar{x}} < \mu_x < \bar{x} + t_{\alpha/2,v}\,\sigma_{\bar{x}}$$

$t_{\alpha/2,v}$ = nilai kritis t yg tergantung pada tingkat kepercayaan dan derajat kebebasan

α = 1 – tingkat kepercayaan (sering disebut chance of error)

V = derajat kebebasan (df) = n - 1

NB: untuk menghitung diperlukan tabel distribusi-t

Contoh

Pengukuran temperatur ruang pemanas 5 buah oven sejenis, yg dilakukan setelah beberapa waktu lamanya pemanasan dilakukan sampai bacaan temperatur stabil (sesuai kondisi operasi yg ditetapkan), menunjukkan nilai sbb (dalam derajat celsius): 101, 88, 94, 96, dan 103.

Estimasikan temperatur rata-rata ruang pemanas sesungguhnya (populasi) dari oven jenis tersebut dg tingkat kepercayaan 95 % !

Jawab:

$$\bar{x} = \frac{101 + 88 + 94 + 96 + 103}{5} = 96{,}4$$

$$s = \sqrt{\frac{(101 - 96{,}4)^2 + (88 - 96{,}4)^2 + (94 - 96{,}4)^2 + (96 - 96{,}4)^2 + (103 - 96{,}4)^2}{5 - 1}} = 5{,}94$$

α = 1 – 95% = 5% = 0,05

Derajat kebebasan (df), v = n – 1 = 5 – 1 = 4

Dari tabel distribusi t, $t_{0.025,4}$ = 2,766

Estimate interval mean populasi:

$$\bar{x} - t_{0.025,4}\sigma_{\bar{x}} < \mu_x < \bar{x} + t_{0.025,4}\sigma_{\bar{x}}$$

$$96{,}4 - (2{,}766)(2{,}66) < \mu_x < 96{,}4 + (2{,}766)(2{,}66)$$

$$89{,}02 < \mu_x < 103{,}78$$

3 Estimasi Proporsi Populasi

- Sampel ukuran besar dg kriteria *np* (perkalian ukuran sampel dg persentase sampel) >_500 (distribusi samplingnya membentuk distribusi normal).

Error standard dapat diestimasi sbb:

- Jika anggota populasi tak terhingga

$$\hat{\sigma}_p = \sqrt{\frac{p(100-p)}{n}}$$

- Jika anggota populasi terhingga sejumlah N

$$\hat{\sigma}_p = \sqrt{\frac{p(100-p)}{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

- Selanjutnya estimate interval persentase populasi dapat dibentuk sebagai:

$$p - z\hat{\sigma}_p < \pi < p + z\hat{\sigma}_p$$

contoh

Suatu jajak pendapat terhadap konsumen merupakan salah satu contoh pemakaian interval persentase populasi. Misalkan suatu jajak pendapat pada 1200 orang memiliki kendaraan, menunjukkan bahwa 532 orang diantaranya memilih menggunakan minyak pelumas lokal, sementara sisanya menggunakan minyak pelumas import.

Estimasikan persentase populasi pemakai minyak pelumas lokal dg tingkat keyakinan 95% !

Jawab

n = 1200; p = 532/1200 = 44,33%; TK = 95%;

$$\hat{\sigma}_p = \sqrt{\frac{p(100-p)}{n}} = \sqrt{\frac{44{,}33(100-44{,}33)}{1200}} = 1{,}43$$

Dg TK 95%, nilai z = 1,96; sehingga estimate intervalnya adalah:

$$p - z\hat{\sigma}_p < \pi < p + z\hat{\sigma}_p$$

$$44{,}33 - 1{,}96(1{,}43) < \pi < 44{,}33 + 1{,}96(1{,}43)$$

$$41{,}53 < \pi < 47{,}13$$

Jadi dari populasi pemilik kendaraan diperkirakan pemakai minyak pelumas lokal antara 41,53% sampai 47,13%.

4. Estimasi Varians Populasi

- Sangat diperlukan untuk mengetahui sejauh mana sebaran nilai parameter sehingga dapat dijadikan untuk mengambil langkah-langkah dalam mengendalikannya.
- Misalnya: yang berkaitan dg suatu tingkat kualitas produk, diinginkan agar bukan hanya rata-rata nilai parameternya yg memenuhi suatu persyaratan tetapi juga konsistensi dari nilai tersebut harus bisa terjamin.

4. Estimasi Varians Populasi

Estimasi interval varians populasi beebentuk:

$$\frac{vs^2}{\chi^2_{\alpha/2,v}} < \sigma^2_x < \frac{vs^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,v}}$$

Dimana:

$\chi^2_{\alpha/2,v}$ = nilai kritis χ^2 yg tergantung tingkat kepercayaan dan derajat kebebasan

α = 1 – tingkat kepercayaan (sering disebut *chance of error*)

v = derajat kebebasan (df) = n – 1

NB : untuk menghitung diperlukan tabel distribusi χ^2

contoh

Suatu mesin pengisi gandum ke dalam kemasan dirancang untuk bekerja mengisi gandum ke dalam kotak rata-rata sebanyak 25 kg. Suatu pemeriksaan terhadap 15 kotak menunjukkan bahwa deviasi standard pengisian gandum itu adalah 0,0894 kg.

Estimasikan deviasi standard populasi dg tingkat kepercayaan 95% !

jawab

s = 0,0894 $\rightarrow$ = 0,008 ; n =15; v = n-1 = 14;

TK 95% $\rightarrow$ α = 1 – 0,95 = 0,05

Estimate interval variansnya adalah:

$$\frac{14(0,008)}{\chi^2_{0.025,14}} < \sigma_x^2 < \frac{14(0,008)}{\chi^2_{0.975,14}}$$

Dg menggunakan tabel χ^2 diperoleh:

$$\frac{14(0,008)}{26,1} < \sigma_x^2 < \frac{14(0,008)}{5,63}$$

$$0,0043 < \sigma_x^2 < 0,0199$$

$$0,066 < \sigma_x < 0,141$$

5.1 Penentuan Ukuran Sampel untuk Mengestimasi Mean Populasi

Batas kepercayaan

$$\bar{x} \pm z\sigma_{\bar{x}} = \bar{x} \pm E$$

dimana:

$\bar{x}$ = mean sampel

$E = z\sigma_{\bar{x}}$ = kesalahan estimate

- Satu hal penting yang harus diperhatikan adalah bahwa dalam menetukan ukuran sampel untuk menetukan estimate interval *perlu diasumsikan terlebih dahulu nilai dari deviasi standard populasinya* (σ_x)

contoh

Pipa-pipa yang digunakan untuk pengeboran minyak (*drilling pipe*) akan diuji tarik di laboratorium untuk menentukan kekuatan/tegangan tarikan (N/cm2). Dari pengalaman selama ini pada pipa yg serupa diketahui bahwa deviasi standard kekuatannya adalah 300 N/cm2. Jika dari pengujian ini diinginkan tingkat keakuratan/ kesalahan estimate tidak melewati ± 75 N/cm2 dg tingkat kepercayaan 95%.

Tentukan ukuran sampel !

Langkah-langkahnya sbb:

- Tingkat keakuratan/kesalahan estimate yg dikehendaki, E = 75
- Tingkat kepercayaan estimasi = 95 %
- Skor z untuk TK 95%, z = 1,96
- Error standard dari mean sampling, $\sigma_{\bar{x}} = \dfrac{E}{Z} = \dfrac{75}{1{,}96} = 38{,}265$
- Asumsi deviasi standard populasi σ_x = 300
- Ukuran sampel yg digunakan, $n = \dfrac{\sigma_x}{\sigma_{\bar{x}}^2} = \dfrac{300}{38{,}265^2} = 61{,}47$
- Jadi ukuran sampel (banyaknya sampel) yg digunakan adalah n=62.

5.2 Penentuan Ukuran Sampel untuk Mengestimasi Proporsi Populasi

Batas kepercayaan

$$p \pm z\sigma_p = p \pm E$$

dimana:

p = proporsi sampel (dalam persentase)

$E = z\sigma_p$ = kesalahan estimate (*error of estimate*)

- Satu hal penting yang harus diperhatikan adalah bahwa dalam menetukan ukuran sampel *perlu diperkirakan terlebih dahulu nilai dari proporsi populasi (π). Jika perkiraan tersebut sulit dilakukan, maka proporsi populasi diasumsikan bernialai π= 50.*

Contoh

Fakultas Teknik UGM ingin memperkirakan persentae mahasiswa yg berminat untuk mengikuti pelatihan ketrampilan di bidang Teknologi Informasi. Unit pelaksanaan teknis yg akan melaksanakan pelatihan tersebut menginginkan agar perkiraan tersebut berada dalam kisaran ± 5% dari sesungguhnya. Estimasi akan dilakukan dg tingkat kepercayaan 95%.

Tentukan ukuran sampel !

Langkah-langkahnya sbb:

- Tingkat keakuratan/kesalahan estimate yg dikehendaki, E =5
- Tingkat kepercayaan estimasi = 95%
- Skor z untuk TK 95%, z = 1,96
- Error standard dari mean sampling, $\sigma_p = \frac{E}{Z} = \frac{5}{1{,}96} = 2{,}55$
- Karena perkiraan persentase populasi tidak diketahui sebelumnya, asumsikan π = 50.
- Ukuran sampel yg digunakan, $n = \frac{\pi(100-\pi)}{\sigma_p^2} = \frac{50(50)}{2{,}55^2} = 385$
- Jadi ukuran sampel (banyaknya sampel) yg digunakan adalah n = 385 mahasiswa.

TERIMAKASIH