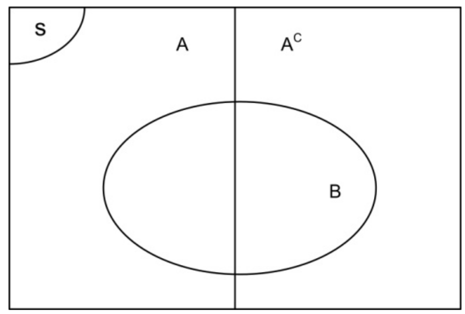
TEOREMA BAYES

Teorema Bayes

Misalkan dimiliki dua kotak yaitu kotak I dan kotak II. Dalam kotak I terdapat 10 bola yang terdiri dari 3 bola merah dan 7 bola putih sedangkan pada kotak II terdapat 15 bola yang terdiri dari 5 bola merah dan 10 bola putih. Apabila bola-bola tersebut disatukan dalam ember dan satu bola diambil secara random tanpa melihat dan ternyata berwarna merah, akan ditentukan probabilitasnya bahwa bola tersebut semula berasal dari kotak I. Karena keseluruhan terdapat 25 bola yang terdiri dari 10 bola dari kotak I dan 15 bola dari kotak II. Dari 25 bola tersebut, 8 bola berwarna merah dan 17 bola berwarna putih.

Misalkan kejadian B adalah kejadian mendapatkan bola berwarna merah dan kejadian A adalah kejadian mendapatkan bola dari kotak I. Probabilitas bersyarat yang diinginkan adalah

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}.$$



Gambar II.5 Hubungan antara Himpunan B, A dan A^c

Kejadian B dapat ditulis sebagai gabungan dari dua kejadian yang terpisah yaitu $B \cap A$ dan $B \cap A^c$ sehingga

$$B = (B \cap A) \cup (B \cap A^c)$$

dan berarti

$$P(B) = P(B \cap A) \cup P(B \cap A^c)$$

Akibatnya

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \frac{P(B \cap A)}{P(B \cap A) + P(B\cap A^c)}$$

dan diperoleh

$$P(B\cap A)=\frac{3}{25},$$

$$P(B\cap A^C)=\frac{5}{25},$$

sehingga

$$P(A|B)= \frac{P(B \cap A)}{P(B \cap A) + P(B\cap A^c)} = \frac{3/25}{(3/25)+(5/25)}=\frac{3}{8}.$$

Dalam bentuk teorema Bayes, hal tersebut dapat dinyatakan dengan

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B\mid A)\,P(A) + P(B\mid A^c)\,P(A^c)}$$

$$= \frac{(3/10)(10/25)}{(3/10)(10/25)+(5/15)(15/25)}$$

$$= \frac{3}{8}.$$

Teorema II.5

Misalkan { A, A^c } suatu himpunan kejadian yang merupakan suatu sekatan sederhana dari ruang sampel S dengan $P(A) \neq 0$.

Misalkan B adalah suatu kejadian sembarang dalam S dengan $P(A) \neq 0$ maka berlaku

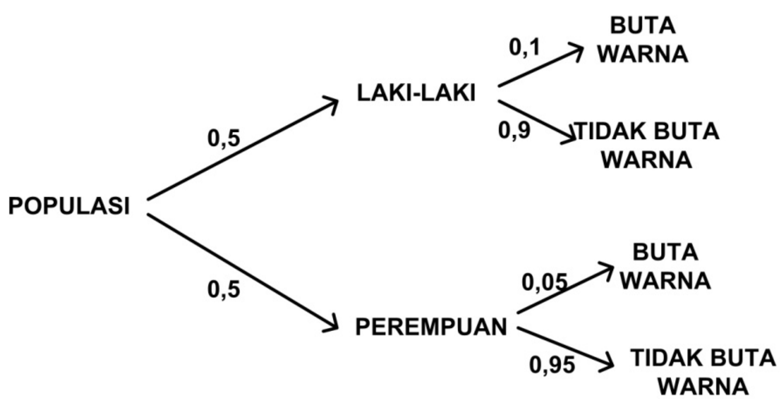
$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B\mid A)\,P(A) + P(B\mid A^c)\,P(A^c)}$$

Contoh II.9

Anggaplah bahwa dalam suatu populasi terdapat laki-laki dan perempuan dengan jumlah yang sama. Dalam populasi ini 10 % dari laki-laki dan 5 % dari wanita adalah buta warna. Seorang buta warna dipilih secara random berapa probabilitasnya orang laki-laki yang terpilih ?

Penyelesaian

Diagram pohon probabilitas yang bisa dibuat adalah



Gambar II.6 Diagram pohon probabilitas

Populasi terbagi ke dalam dua himpunan bagian yang saling asing yaitu laki-laki (kejadian **M**) dan perempuan (kejadian **F**). Akan dicari probabilitasnya orang laki-laki yang terpilih dengan syarat buta warna (**BW**). Dengan menggunakan teorema Bayes diperoleh

$$
\begin{aligned}
P(M|BW) &= \frac{P(BW\,|\,M)\,P(M)}{P(BW\,|\,M)\,P(M) + P(BW\,|\,F)\,P(F)} \\
&= \frac{(0{,}05)(0{,}5)}{(0{,}05)(0{,}5) + (0{,}0025)(0{,}5)} \\
&= \frac{2500}{2625}. \\
&= \frac{20}{21}.
\end{aligned}
$$

Secara umum, teorema Bayes dinyatakan dalam teorema berikut ini.

Teorema II.6

Misalkan $\{ A_1, A_2, \ldots, A_n \}$ suatu himpunan kejadian yang merupakan suatu sekatan ruang sampel S dengan $P(A_i) \neq 0$ untuk $i = 1,2, \ldots, n$.

Misalkan B suatu kejadian sembarang dalam S dengan $P(B) \neq 0$ maka untuk $k = 1,2, \ldots, n$ berlaku

$$P(A_k\,|\,B) = \frac{P(A_k \cap B)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B)} = \frac{P(B|A_k)\,P(A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)}\,.$$